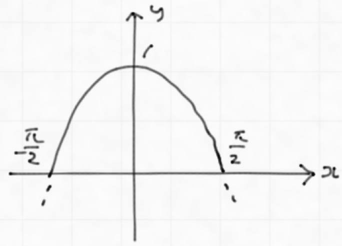
京都工芸繊維大学 2021 後期

1

(1) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で　$y=\cos x$ のグラフは右のような概形をしており，$x=\pm\frac{\pi}{2}$ のとき 0 となり $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において正の値をとる。$e^{\sqrt{2}\sin x}$ は必ず正の値をとるので，$f(x)$ のグラフは $x=\pm\frac{\pi}{2}$ のとき 0 となり $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において正の値をとる。



よって C と x 軸で囲まれる図形の面積を S として

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)e^{\sqrt{2}\sin x}\,dx$$

$\sqrt{2}\sin x=t$ とすると $\left(\frac{dt}{dx}=\sqrt{2}\cos x,\quad \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{\pi}{2} & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -\sqrt{2} & \to & \sqrt{2} \end{array}\right)$

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\cos x)e^{t}\times\frac{1}{\sqrt{2}\cos x}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}e^{t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[e^{t}\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)}$$

(2) $f'(x)=-\sin x\, e^{\sqrt{2}\sin x}+\sqrt{2}\cos^2 x\, e^{\sqrt{2}\sin x}$

$f'(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1}+\sqrt{2}\times\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{e}$

$f(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2e}$

以上より $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ における接線は　$y=\frac{\sqrt{2}}{e}(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2e}$　　$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{\sqrt{2}}{e}x+\frac{\sqrt{2}}{4e}(\pi+2)}$

(3) $f'(x)=e^{\sqrt{2}\sin x}\left(\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x\right)$

$f'(x)=0$ となるのは　$\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow (\sin x+\sqrt{2})(2\sin x-\sqrt{2})=0$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ だから，$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$e^{\sqrt{2}\sin x}$ は常に正の値をとるので $f(x)$ の増減は下のようになる．

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}e$ だから．

$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ のとき最大となり最大値は $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}e}$

京都工芸繊維大学 2021 後期

2 $f(x) = 6x - 6\log x - 3(\log x)^2 - (\log x)^3$

(1) $f'(x) = 6 - \dfrac{6}{x} - 3 \times 2\log x \cdot \dfrac{1}{x} - 3(\log x)^2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x}\left\{2x - 2 - 2\log x - (\log x)^2\right\}$

$f''(x) = +\dfrac{6}{x^2} - 6 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} - 6 \cdot \log x \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - 3 \times 2\log x \cdot \dfrac{1}{x^2} - 3(\log x)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{3}{x^2}(\log x)^2$

(2) $f''(x) = \dfrac{3}{x^2}(\log x)^2 > 0$ だから $f'(x)$は $x>0$ において単調に増加する

また、$f'(1) = 6-6-0-0=0$ だから $f'(x)$は $0<x<1$ において負, $x=1$のとき0, $x>1$において正の値をとることが分かり $f(x)$の増減は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

以上より $x>0$ において $f(x) \geqq f(1)$ が成り立つことが示された

(3) (2)より $6x - 6\log x - 3(\log x)^2 - (\log x)^3 \geqq 6$

$x \geqq \log x + \dfrac{1}{2}(\log x)^2 + \dfrac{1}{6}(\log x)^3 + 1$

右辺は正だから、これを $\dfrac{(\log x)^2}{x}$ に代入

$$\frac{(\log x)^2}{x} \leqq \frac{(\log x)^2}{\log x + \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{6}(\log x)^3 + 1} < \frac{(\log x)^2}{\frac{1}{6}(\log x)^3} = \frac{6}{\log x}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{6}{\log x} = 0$ であり、また

$$0 < \frac{(\log x)^2}{x} < \frac{6}{\log x}$$

が成り立つので、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$

京都工芸繊維大学 2021 後期

3. (1) $5x+4y=k \cdots ①$, $3x+2y=l \cdots ②$

(i)⇒(ii)を示す.

① より $x \equiv k \pmod 2$

② より $x \equiv l \pmod 2$

よって $k \equiv l \pmod 2$

∴ x, y が整数ならば k, l の偶奇は一致する.

(ii)⇒(i)を示す.

②×2−① $x=2l-k$

よって, k, l が整数ならば x は整数である.

①×3−②×5 $2y=3k-5l$

$$y=k-2l+\frac{k-l}{2}$$

$k-l$ は k と l の偶奇が一致したとき, 偶数となるので y は整数である.

以上より. k, l の偶奇が一致すると x, y は整数である

よって (i) と (ii) は同値であることが示された.

(2) $5x+4y=k$, $3x+2y=l$ とすると

$0 \leqq k \leqq n$, $0 \leqq l \leqq n \quad \cdots ③$

(1)より. ③ を満たす整数 k, l のうちで, k と l の偶奇が一致するとき, 連立不等式を満たす整数 x, y が存在する.

(i) $n=2m$ のとき. $0 \leqq k \leqq 2m$ かつ $0 \leqq l \leqq 2m$ を満たす k, l は

$k=0$ のとき. $l=0, 2, 4 \ldots 2m$ の $m+1$ 通り

$k=1$ 〃 $l=1, 3, 5, \ldots 2m-1$ の m 通り

⋮ ⋮

$k=2m$ 〃 $l=0, 2, 4, \ldots 2m$ の $m+1$ 通り

以上より k, m の組み合わせは $(m+1)^2+m^2=2m^2+2m+1=2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^2+n+1=\frac{1}{2}n^2+n+1$ 通り.

(ii) $n=2m-1$ のとき. $k=0$ のとき $m=0, 2, 4 \ldots, 2m-2$ の m 通り.

$k=1$ 〃 $m=1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ の m 通り

⋮ ⋮

$k=2m-1$ 〃 $m=1, 3, 5 \ldots 2m-1$ の m 通り.

以上より k, m の組み合わせは $m\times 2m=2m^2=2\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}n^2+n+\frac{1}{2}$

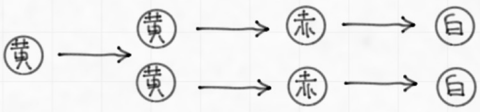
よって連立不等式を満たす格子点の数は **n が偶数のとき $\frac{1}{2}n^2+n+1$ 個 奇数のとき $\frac{1}{2}n^2+n+\frac{1}{2}$ 個**

京都工芸繊維大学 2021 後期

(1) 黄 が 白 に変わるには、まず 赤 に変わってから 白 となるので 2回の操作が必要。

また、球の数が 2つになるには 黄→黄黄 の操作が含まれていないといけない。

したがって 3回の操作で $W=2$ となるのは

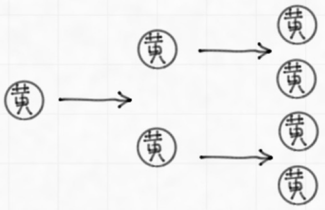


のようになるしかない。

$$p_1 = a\times b^2\times 1 = ab^2$$

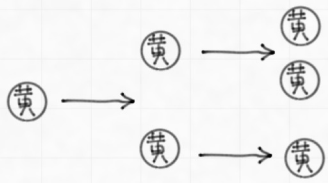
(2) 3回目の操作後、$W=0$ となるのは、2回目の操作終了時点で箱Aに 黄 しか存在しないときである。

(i) 1回目、2回目とも全て1の目が出る



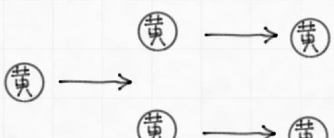
$$a\times a^2 = a^3$$

(ii) 1回目に1の目が出て、2回目は一方のみ1の目（もう一方は 3〜6）



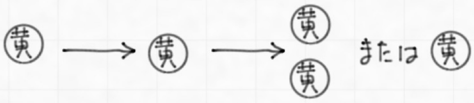
$$a\times a\times(1-a-b)\times 2 = 2a^2(1-a-b)$$

(iii) 1回目に1の目、2回目はいずれも 3〜6の目。



$$a\times(1-a-b)^2$$

(iv) 1回目 3〜6の目、2回目は1または 3〜6の目



$$(1-a-b)\times\left(a+(1-a-b)\right) = (1-a-b)(1-b)$$

(i)(ii)(iii)(iv)より

$$\begin{aligned}P &= a^3+2a^2(1-a-b)+a(1-a-b)^2+(1-a-b)(1-b)\\ &= \cancel{a^3}+\cancel{2a^2}-\cancel{2a^3}-\cancel{2a^2b}+\cancel{a}+\cancel{a^3}+ab^2-\cancel{2a^2}-2ab+\cancel{2a^2b}+1-b-\cancel{a}+ab-b+b^2\\ &= ab^2-ab+b^2-2b+1\end{aligned}$$

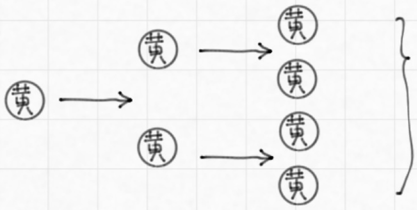
$W\geqq 1$ となるのは上記の余事象 $1-P = \boldsymbol{ab+2b-ab^2-b^2}$

京都工芸繊維大学 2021 後期

(3) 3回目の操作後 R≧3となるためには2回目の操作終了時点で Y≧3となっていなくてはいけない
(∵ 赤は操作によって必ず白になるため)

2回目の操作後、Y≧3となるのは (2) の (i)(ii) の2つのケースで、このあとの3回目の操作で赤が3つ以上となればよい

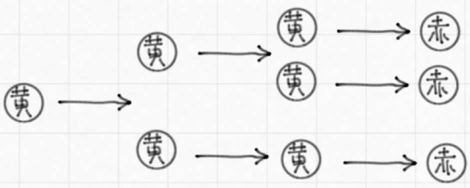
(i) 1回目、2回目とも全て1の目が出る



4つのうち3つが赤　1つが他　　または　　4つとも赤

$$a\times a^2 \times \left({}_4C_3\times b^3\times(1-b)+b^4\right)$$

(ii) 1回目に1の目が出て、2回目は一方のみ1の目 (もう一方は 3〜6)



$$a\times a\times(1-a-b)\times 2\times b^3$$

(i)(ii)より $p_3 = a^3\left(4b^3(1-b)+b^4\right)+2a^2(1-a-b)b^3 = 4a^3b^3-3a^3b^4+2a^2b^3-2a^3b^3-2a^2b^4$

$$= \mathbf{2a^3b^3-3a^3b^4+2a^2b^3-2a^2b^4}$$