熊本大学2022

1

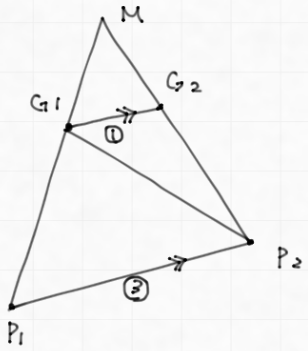
(1) $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a\\1\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a+1\\1\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$　　よって P_1, P_2 を通る直線と G_1, G_2 を通る直線は平行

(2) $\overrightarrow{P_1G_1} = \overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2a\\1\\3\end{pmatrix}$



$|\overrightarrow{P_1G_1}| = \frac{1}{3}\sqrt{4a^2+1+9} = \frac{1}{3}\sqrt{4a^2+10}$

$\overrightarrow{P_1G_1}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2a\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}a$

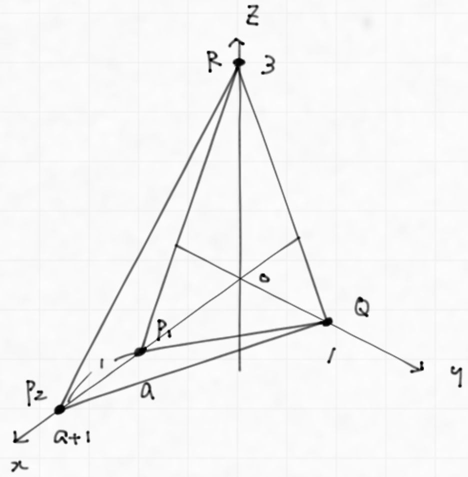
$\triangle P_1P_2G_1$ の面積は

$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1G_1}|^2|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 - (\overrightarrow{P_1G_1}\cdot\overrightarrow{P_1P_2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}(4a^2+10) - \frac{4}{9}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}$

$\triangle P_1P_2G_1$ と $\triangle G_1P_2G_2$ は　$P_1P_2 \parallel G_1G_2$ かつ $P_1P_2 : G_1G_2 = 3:1$ だから

$\triangle G_1P_2G_2 = \frac{1}{3}\triangle P_1P_2G_1 = \frac{\sqrt{10}}{18}$

よって 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積は $\frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{\sqrt{10}}{18} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\sqrt{10}}$



(3) R, Qの中点をMとする

G_1 は $\triangle P_1QR$ の重心だから P_1G の延長とRQの交点はM

P_2G とRQの交点もMで. $RM:MQ = 1:1$ だから

$\triangle P_1MP_2$ は 四面体 P_1P_2QR を二等分する.

$\triangle MP_1P_2$ と $\triangle MGG_2$ は相似でその比は $3:1$

$\triangle MP_1P_2$ と $\triangle MGG_2$ の面積の比は $9:1$

だから 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積は $\triangle MP_1P_2$ の $\frac{8}{9}$ 倍

右図で P_1P_2Q を底面と考えると P_1P_2QR の高さはORに相当し3.

$\triangle P_1P_2Q$ の面積は　$P_1P_2 \times OQ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ だから. 四面体 P_1P_2QR の体積は $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

P_1P_2QM はその $\frac{1}{2}$ 倍.　$Q\text{-}P_1P_2G_2G_1$ はさらに P_1P_2QM の $\frac{8}{9}$ 倍

よって 四角錐 $Q\text{-}P_1P_2G_2G_1$ の体積は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$

2

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$0 \leqq \frac{\pi}{2}x \leqq \frac{\pi}{2}$

このとき　$0 \leqq \sin\frac{\pi}{2}x \leqq 1$

$f(x)$ が最大となるのは $\sin\frac{\pi}{2}x = 1$ のとき，つまり $x=1$ のときで $f(1)=\sqrt{2}$

最大値は $\sqrt{2}$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき．$\sqrt{2}x \geqq 0$，$f(x) \geqq 0$ だから平方の差を考える

$$\{f(x)\}^2 - (\sqrt{2}x)^2 = 1+\sin^2\frac{\pi x}{2} - 2x^2 \ (= g(x) \text{とおく})$$

$$g'(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \times \frac{\pi}{2} - 4x$$

$$= \pi\sin\pi x - 4x$$

$$g''(x) = \pi^2\cos\pi x - 4$$

$0 \leqq x \leqq 1$ で $\cos\pi x$ は単調に減少するので $0<x<1$ の範囲で $g''(x)=0$ となる x が1つだけ存在する．（これを α とおくと．$\pi^2\cos\pi\alpha - 4 = 0$）

$g'(x)$ の増減は下のとおり．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\pi^2-4$

$g'(0)=0$，$g'(1) = -\pi^2-4<0$

だから $\alpha<x<1$ の範囲で $g'(x)=0$ となる x が1つだけ存在する（これを β として．$\pi\sin\pi\beta - 4\beta = 0$）

$g(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\pi^2-4$
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	0

$g(0) = 1+0-0 = 1$

$g(1) = 1+1-2 = 0$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ において $g(x) \geqq 0$ であり

これは $0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq \sqrt{2}x$ であることを示している

(3) $0 \leqq \sin^2\frac{\pi x}{2} \leqq 1$ だから　$f(x) \leqq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

(2)と併せて，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき．

$$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$$

n乗して　$(\sqrt{2}x)^n \leqq \{f(x)\}^n \leqq (\sqrt{2})^n$

上の式を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にわたって積分する

$$\int_0^1 \sqrt{2}^n x^n dx \leqq \int_0^1 \{f(x)\}^n \leqq \int_0^1 \sqrt{2}^n dx$$

$$2^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n+1} \leqq a_n \leqq 2^{\frac{n}{2}}$$

n乗根をとる　$\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2}$ …①

ここで $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$ について自然対数をとったものの極限値を考えると．$\boxed{\nwarrow}$

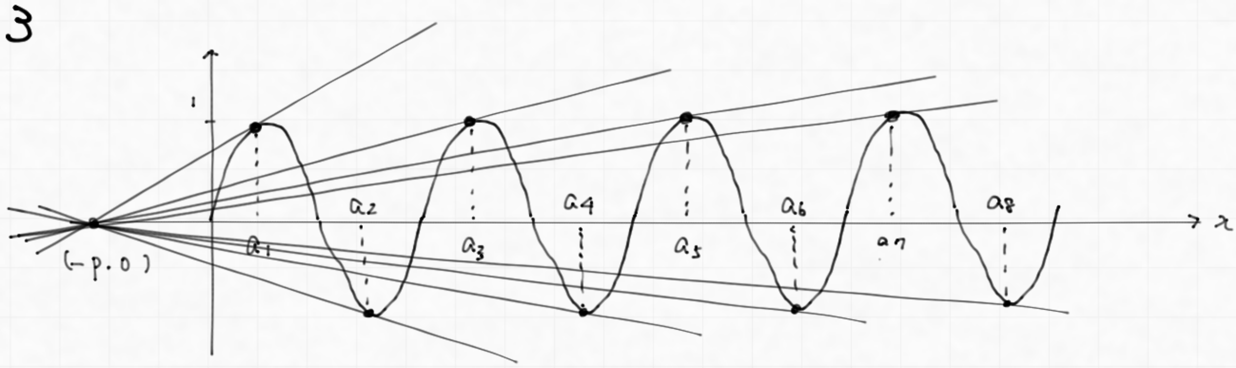
$\boxed{\searrow}$ $\lim_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{\log(n+1)}{n}\right\} = 0$

よって $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$ …②

①，② より，はさみ打ちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$$

3



(1) $y = \sin x$ 上の点 $(t, \sin t)$ における接線は $(\sin x)' = \cos x$ だから

$$y = \cos t(x - t) + \sin t$$

これが $(-p, 0)$ を通るとき.

$$0 = -p\cos t - t\cos t + \sin t \quad \cdots ①$$

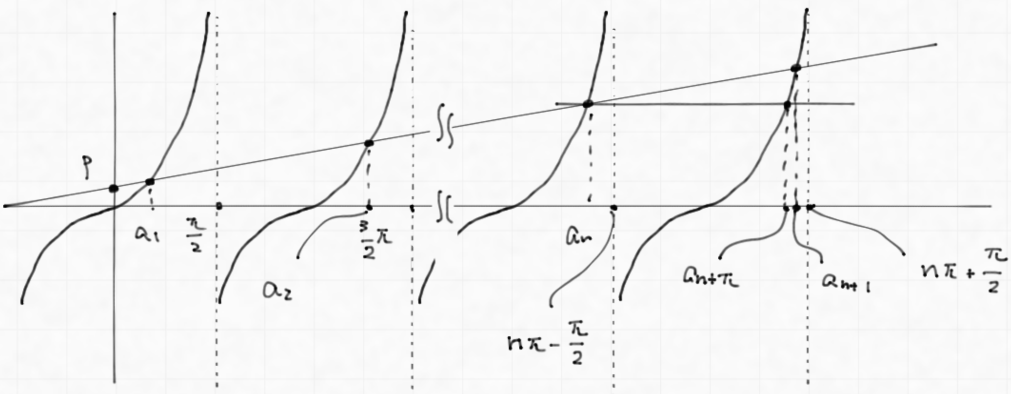
$\cos t = \frac{\pi}{2}$ が成り立つとき、上式は成立しないので ① の両辺を $\cos t$ で割って

$$\tan t = t + p \quad \cdots ②$$

$t = a_1, a_2, a_3 \cdots$ は ② を満たす.

よって $\tan a_n = a_n + p$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ が成り立つことが示された.

(2) ② の解は $y = \tan t$ と $y = t + p$ の交点と一致する



$$\tan a_n = \tan(a_n + \pi) < \tan a_{n+1}$$

$n\pi - \frac{\pi}{2} < a_n + \pi < n\pi + \frac{\pi}{2}$ かつ $n\pi - \frac{\pi}{2} < a_{n+1} < n\pi + \frac{\pi}{2}$ で.

$(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ において $\tan x$ のグラフは単調に増加するので $a_n + \pi < a_{n+1}$

よって $a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つ

(3) $a_1 = \frac{\pi}{3}$ を ① に代入 $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + p$ $\quad\therefore p = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

$\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ (以下命題) を数学的帰納法により示す

(i) $n=1$ のとき

$\tan a_2 = a_2 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > a_1 + \pi + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \pi + \sqrt{3}$

$\therefore$ $n=1$ のとき命題は成り立っている

(ii) $n=k$ のとき、

$\tan a_{k+1} > k\pi + \sqrt{3}$ が成り立つと仮定する.

このとき.

$$\begin{aligned}
\tan a_{k+2} &= a_{k+2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad (\because (1))\\
&> \pi + a_{k+1} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad (\because (2))\\
&= \pi + \tan a_{k+1} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\frac{\pi}{3}} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\frac{\pi}{3}} \quad (\because (1))\\
&> \pi + k\pi + \sqrt{3} \quad (\because \text{仮定})\\
&= (k+1)\pi + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

よって命題は仮定の下で $n=k+1$ でも成り立つ.

(i)(ii) より. 数学的帰納法により. 命題は全ての自然数 n について成立する.

4

(1) $m=n=2$ とすると $mn+2=6$, ${}_{m+n}C_m={}_4C_2=6$.

$\therefore$ $(m,n)=\mathbf{(2,2)}$ は $mn+2={}_{m+n}C_m$ を満たす

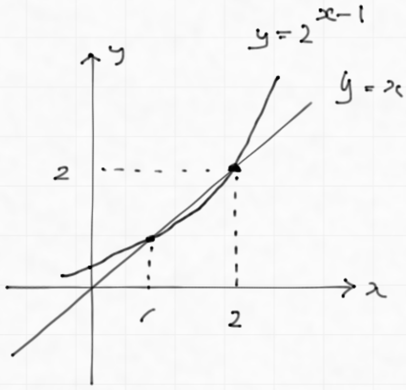
(2) $m\geqq 3$ のとき

$$ {}_{m+n}C_m=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}=\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(n+1)}{m\cdot(m-1)\cdots 1} $$

$$ =\left(1+\frac{n}{m}\right)\left(1+\frac{n}{m-1}\right)\left(1+\frac{n}{m-2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{2}\right)(1+n) $$

$$ >2^{m-1}(1+n) $$

$$ =2^{m-1}n+2^{m-1} $$



ここで $m\geqq 3$ のとき $m<2^{m-1}$ (右グラフより明らか)

で, $2^{m-1}>2$ だから

$$ 2^{m-1}n+2^{m-1}>mn+2 $$

よって $m\geqq 3$ のとき. $mn+2={}_{m+n}C_m$ は成立しない.

$m=2$ のとき 条件は

$$ 2n+2={}_{n+2}C_2=\frac{1}{2}(n+2)(n+1) $$

$n^2-n-2=0$ $\therefore$ $n=2,-1$ よって $m=2$ のとき $n=2$ のみ条件を満たす

$m=1$ のとき

左辺 $=n+2$

右辺 $={}_{n+1}C_1=n+1$

よって $m=1$ のとき 条件は成立しない

以上より. $mn+2={}_{mn}C_m$ を満たす (m,n) の組みは(1)でもとめた $(2,2)$ に限られる.