産業医大2021

1 (1) $5\,(L) \times 1000 \times 60 \times 24 = 7200000 = \mathbf{7 \times 10^{6}\ cm^3/day}$

cm^3　cm^3/h　cm^3/day

(2) $2\ dL = 200\ mL = 200\ cm^3$

$200 \times 1.060 = 212\ g = 0.212\ kg = \mathbf{2 \times 10^{-1}\ kg}$

(3) 3 s に 0.05 dL ⇒ $0.05 \times 100_{mL} \times \frac{60}{3} = 100$ mL/分 $\ \ $ mL/分・500g $= 20$ mL/100g・分 $= \mathbf{2 \times 10^{1}}$ mL/100g分

(4) 1滴は $\frac{1}{60}\,cm^3$　　$20\ mL = 20\ cm^3$ だから $20 \div \frac{1}{60} = 1200$ 滴/1時間

$\frac{3600}{1200}$ 秒/滴 $= \mathbf{3}$ 秒/滴

産業医大2021

2 (1) $y=ax^2+bx+c$ とおく

$(-1,8)$ を通る　$8=a-b+c \cdots ①$

$(1,6)$ を通る　$6=a+b+c \cdots ②$

$(3,20)$ を通る　$20=9a+3b+c \cdots ③$

③ − ①　$12=8a+4b \iff 2a+b=3 \cdots ④$　　$6=2-1+c$

① − ②　$2=-2b \iff b=-1 \cdots ⑤$

⑤を④に代入　$a=2 \cdots ⑥$　⑤⑥を②に代入　$c=5$　　$\therefore$ **$y=2x^2-x+5$**

(2) 互いに素な自然数 a', b' を用いて a, b は

$a=24a'$, $b=24b'$

とおくことができる. $a+b=96$ に代入して　$24a'+24b'=96 \iff a'+b'=4$

a' と b' は互いに素で $a' \leqq b'$ だから　$a'=1$, $b'=3$.　　$\therefore$ **$a=24$, $b=72$**

(3) $\log_{10} 6^{170} = 170\times(0.3010+0.4771)=132.277$

$6^{170}=10^{132}\times10^{0.277}$　　**133桁**

また $10^0=1$, $10^{0.3010}=2$ より　$10^0<10^{0.277}<10^{0.3010}$　つまり　$1<10^{0.277}<2$

よって最高位の数は **1**

(4) $\frac{1}{1} \Big| \frac{1}{3}\ \frac{2}{3} \Big| \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5} \Big| \frac{1}{7}\ \frac{2}{7}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{7} \Big| \frac{1}{9}\ \frac{2}{9}\ \frac{3}{9} \cdots$

第n群はn個の項を含むので第n群末項は　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目の項

第1000項が第n群に属しているものとすると

$\frac{1}{2}(n-1)n < 1000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$　　$\therefore n=45$

第44群の末項は $\frac{1}{2}\times44\times45=990$ 項目だから　第1000項は第45群の10項目

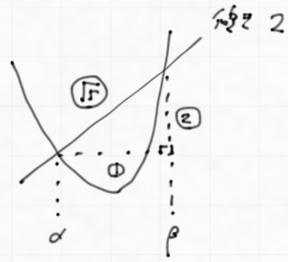
第45群の分母は $45\times2-1=89$.　よって求める値は **$\frac{10}{89}$**

(5) $(-2+4i)-(3-i)=-5+5i$　　$\sqrt{(-5)^2+5^2}=$ **$5\sqrt{2}$**

(6) 連立した交点の x 座標を α, β とすると

$x^2+5x-3=2x+f \iff x^2+3x-3-f=0$

より　$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-3-f$



直線の傾きが2だから　右図より, 二次曲線が直線から

切りとる線分の長さは　$|\beta-\alpha|\times\sqrt{5}$

よって　$|\beta-\alpha|\times\sqrt{5}=5$　　2乗して　$\cancel{5}(\beta-\alpha)^2=5^{\cancel{2}}$

$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=5$　代入して　$9+12+4f=5$　　**$f=-4$**

産業医大2021

(7) 表を → 裏を ← と表す.

$$\underbrace{\rightarrow\leftarrow}_{\text{並べる}}\ \underbrace{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow}_{\text{並べる}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8\times\frac{2!}{1!1!}\times\frac{6!}{3!3!}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}}{2^{\cancel{8}5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\frac{5}{32}$$

(8) $f(x,y)=3x^2-6xy+7y^2+12x-14y+12$

$=3(x-y+2)^2+7y^2-14y+12-3(y-2)^2$

$=3(x-y+2)^2+4y^2-2y$

$=3(x-y+2)^2+4\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}$

yを固定する

$y-2\geqq0$ のとき、 $x=y-2$ で最小値 $4y^2-2y$

$y\geqq2$ の範囲で y を動かすと $y=2$ で $4y^2-2y$ は最小値 12 をとる

$y-2<0$ のとき $(0<y<2)$

$x=0$ のとき $f(x,y)$ は最小値 $7y^2-14y+12$

$0<y<2$ で y を動かすと $7(y-1)^2+5$ だから $y=1$ で最小値 5 をとる

以上より、最小値は $x=0,\ y=1$ のときで $f(0,1)=\mathbf{5}$

(9) $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP})$

$2|\overrightarrow{AB}|^2+9\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AB})$

$9|\overrightarrow{AP}|^2-18\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+8|\overrightarrow{AB}|^2=0$

$|\overrightarrow{AP}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{8}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=0 \iff |\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 \iff |\overrightarrow{BP}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$

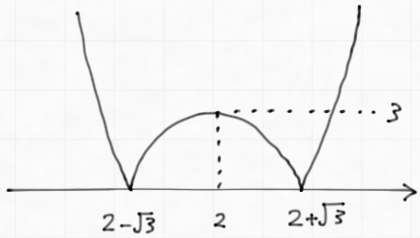
Bを中心とした半径 $\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$ の円

(10) $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$

$$=\frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\qquad\therefore\ z^6=\cos\pi+i\sin\pi=\mathbf{-1}$$

産業医大2021

3　$y=|x^2-4x+1| = |(x-2)^2-3|$



$x^2-4x+1=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

したがってグラフは右のようになっている

(1)　**(2, 3)**

(2)　$x^2-4x+1=9$ を解くと　$x^2-4x-8=0$　$x=2\pm2\sqrt{3}$

よって、もとめる面積Sは　$S=\frac{1}{6}\left(2+2\sqrt{3}-(2-2\sqrt{3})\right)^3-\frac{1}{6}\left(2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\right)^3\times2=32\sqrt{3}-8\sqrt{3}=\mathbf{24\sqrt{3}}$

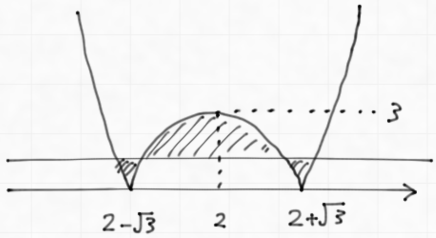
(3)　$f\geqq3$ のときは $f=3$ のときよりも明らかに大きい。

また、$f<0$ のとき、二次関数と $y=f$ によって囲まれる図形は存在しない

よって $0\leqq f<3$ の範囲で考える

このとき、二次関数と $y=f$ によって囲まれる図形は

右のようになっている



$y=x^2-4x+1$ と $y=f$ の交点のx座標は

$x^2-4x+1-f=0$ より　$x=2\pm\sqrt{3+f}$

$y=-x^2+4x-1$ と $y=f$ の交点のx座標は

$x^2-4x+1+f=0$ より　$x=2\pm\sqrt{3-f}$

$$S=\frac{1}{6}\left\{2+\sqrt{3+f}-\left(2-\sqrt{3+f}\right)\right\}^3-\frac{1}{6}\left\{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\right\}^3\times2+\frac{1}{6}\left\{2+\sqrt{3-f}-\left(2-\sqrt{3-f}\right)\right\}^3\times2$$

$$=\frac{8}{6}(3+f)\sqrt{3+f}-\frac{2}{6}\times24\sqrt{3}+\frac{16}{6}(3-f)\sqrt{3+f}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{(3+f)^{\frac{3}{2}}+2(3-f)^{\frac{3}{2}}\right\}-8\sqrt{3}$$

$$\frac{dS}{df}=2(3+f)^{\frac{1}{2}}-4(3-f)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{dS}{df}=0$ を解く　$\cancel{4}(3+f)=\overset{4}{\cancel{16}}(3-f)$　$f=\frac{9}{5}$

f	0	$\cdots$	$\frac{9}{5}$	$\cdots$	3
$\frac{dS}{df}$		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

Sの増減は右のようになる

よってSが最小となるのは $f=\mathbf{\frac{9}{5}}$ のとき

産業医大2021

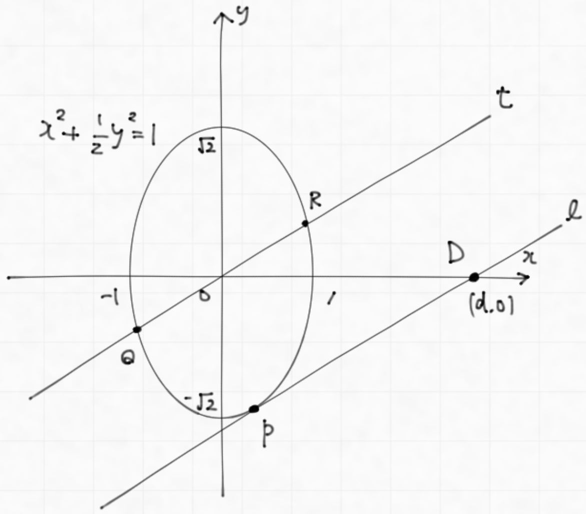
4 (1) Dを通って傾きmの直線は

$$y = m(x-d)$$

これとだ円の式を連立

$$x^2 + \frac{1}{2}m^2(x-d)^2 = 1$$

$$(2+m^2)x^2 - 2m^2dx + m^2d^2 - 2 = 0 \quad \cdots ①$$



判別式をD_2とすると①は重解を持つので$D_2=0$

$$\frac{D_2}{4} = m^4d^2 - (2+m^2)(m^2d^2-2)$$

$$= -2m^2d^2 + 4 + 2m^2 = 0$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}} \quad (\because m>0) \qquad l : y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}}x - \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{d^2-1}}$$

(2) $t : y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}}x$

tとだ円の式を連立 $\quad x^2 + \dfrac{x^2}{d^2-1} = 1 \qquad x = \pm\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{d}$

$$QR = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}}\right)^2} \times \left|\frac{\sqrt{d^2-1}}{d}\times 2\right| = \sqrt{\frac{d^2+1}{d^2-1}}\,\frac{\sqrt{d^2-1}}{|d|}\times 2 = \frac{2}{|d|}\sqrt{d^2+1} = \frac{2\sqrt{d^2+1}}{|d|}$$

(3) Pとtの距離(hとする)は、$t : \sqrt{2}x - \sqrt{d^2-1}\,y = 0$ であり、

①に$m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}}$を代入して $\quad \dfrac{2d^2}{d^2-1}x^2 - \dfrac{4d}{d^2-1}x + \dfrac{2}{d^2-1} = 0 \qquad d^2x^2 - 2dx + 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{d}$

$P\left(\dfrac{1}{d}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{d^2-1}}\left(\dfrac{1}{d}-d\right)\right)$ だから、

$$h = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{d} - \sqrt{2}\left(\frac{1}{d}-d\right)\right|}{\sqrt{2+d^2-1}} = \frac{\sqrt{2}|d|}{\sqrt{d^2+1}}$$

よって△PQRの面積Sは

$$S = \frac{1}{2}QR\cdot h = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{d^2+1}}}{\cancel{|d|}} \times \frac{\sqrt{2}\cancel{|d|}}{\cancel{\sqrt{d^2+1}}} = \sqrt{2}$$