日本獣医生命科学大2021 第3回

1

1. $p_1 = \mathbf{\frac{2}{5}}$, $p_2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{13}{25}}$

2、 n回目までの和が偶数 p_n

その条件の下で $n+1$回目までの和が偶数 $\frac{2}{5}$

n回目までの和が奇数 $1-p_n$

その条件の下で $n+1$回目までの和が偶数 $\frac{3}{5}$

以上より $p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$

$\mathbf{p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}}$

3. $p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できる.

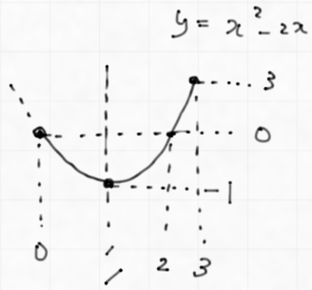
$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$は初項 $p_1 - \frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{5}$の等比数列だから.

$p_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$

$\mathbf{p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2}}$

日本獣医生命科学大2021 第3回

11



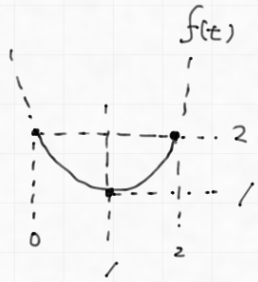
$x^2-2x=(x-1)^2-1$ だから

$-1 \leqq x^2-2x \leqq 3$

となる. したがって

$|x^2-2x|+1$ の値の範囲は　$1 \leqq |x^2-2x|+1 \leqq 4$

このとき　$0 \leqq \log_2(|x^2-2x|+1) \leqq 2$



$\log_2(|x^2-2x|+1)=t$ とおくと

$f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$ だから

$t=1$ のとき. すなわち $|x^2-2x|+1=2 \iff x^2-2x=\pm 1 \iff x=1,\ 1+\sqrt{2}$

のとき $f(x)$ は最小値 1 をとる

$t=0$ または 2. すなわち $|x^2-2x|+1=1,\ 4 \iff x^2-2x=0,\ x^2-2x=3$

$\iff x=0,\ 2,\ 3$

のとき $f(t)$ は最大値 2 をとる.　$f(t)=2$ の解は上記の3つで, その総和は 5

ア 1　イ $1+\sqrt{2}$　ウ 1　エ 2　オ 3　カ 5

日本獣医生命科学大2021 第3回

|1|

ア　重心は　$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=$ **(5, 6, 5)**

イ　$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$　　$\overrightarrow{AC}=(5,-5,-4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{66}$　　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5+5-4=6$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(2\sqrt{14})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 66-6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{162}=\frac{3}{2}\sqrt{18}=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{2}}{2}}$

ウ　$PABC=3=\triangle ABC\times|\overrightarrow{PG}|\times\frac{1}{3}$　より.　$|\overrightarrow{PG}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

エ　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直で長さ 1, x成分が正のベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=a-b+c=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=5a-5b-4c=0$　　　$c=0$, $a=b$.

$a^2+b^2+c^2=1$ より.　$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$(\because a>0)$　　$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

$\overrightarrow{PG}=\pm\sqrt{2}\,\vec{n}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}=\begin{pmatrix}5\\6\\5\end{pmatrix}\pm\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\5\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix}$

小さい順に $(4,5,5)$, $(6,7,5)$

日本獣医生命科学大2021 第3回

IV

1. C と l の式を連立 $x^4 = t^3 x \Leftrightarrow x(x^3 - t^3) = 0 \quad \therefore x = 0, t$

Pの座標は $\mathbf{(t, t^4)}$

2. $$S(t) = \int_0^t t^3 x - x^4 \, dx + \int_t^1 x^4 - t^3 x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} t^3 x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^t + \left[\frac{1}{2} t^3 x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_1^t$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^5 - \frac{1}{5} t^5 \right) \times 2 - 0 - \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} t^5 - \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{5}$$

3. $S'(t) = 3t^4 - \frac{3}{2} t^2 = \frac{3}{2} t^2 (2t^2 - 1)$

$S'(t) = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ だから $0 < t < 1$ のとき $S(t)$ の増減は右のようになる

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘		↗	

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{10\sqrt{2}} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{20}}$$