北里大学2020 獣医

問題1　$(x-\frac{1}{x})^2 = x^2-2+\frac{1}{x^2} = 2^2$ より　$x^2+\frac{1}{x^2} = \mathbf{6}$ (ア)

$(x+\frac{1}{x})^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = 6+2 = 8$　　$x+\frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$

$x^3+\frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = 2\sqrt{2}\times(6-1) = 10\sqrt{2} = 14.14$　　**14** (イ)

$x-\frac{1}{x} = 2$ より　$x^2-2x-1=0$ より $x = 1+\sqrt{2}$ $(\because x>0)$

また、$x^4+3x^3-14x^2+4x = (x^2-2x-1)(x^2+5x-3)+3(x-1)$

ここに $x=1+\sqrt{2}$ を代入して、$3(1+\sqrt{2}-1) = 3\sqrt{2} = 4.242$　　**4** (ウ)

1　5　-3
1　-2　-1 | 1　3　-14　4　0
1　-2　-1
5　-13　4
5　-10　-5
-3　9　0
-3　6　3
3　-3

問題2　$0<x\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき　$0<\tan x\leqq\sqrt{3}$

$\tan x+\frac{1}{\tan x} \geqq 2\sqrt{\tan x\times\frac{1}{\tan x}} = 2$

(エ)

等号は $\tan x = \frac{1}{\tan x}$　すなわち $\tan x = 1$、$x = \mathbf{\frac{\pi}{4}}$ のとき

$4\sin x+\frac{1}{\cos x} = 4\sqrt{\tan x}$　　2乗して　$16\sin^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\times 8+\frac{1}{\cos^2 x} = 16\tan x$

$16\sin^2 x-8\tan x+\frac{1}{\cos^2 x} = 0$

$16\cos^2 x\sin^2 x-8\cos x\sin x+1 = 0$

$(4\cos x\sin x-1)^2 = 0$

$\cos x\sin x = \frac{1}{4}$

$\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1}{16}$　だから　$\cos^2 x(1-\cos^2 x) = \frac{1}{16}$

$\cos^2 x = \frac{8\pm4\sqrt{3}}{16}$、$\cos x = \frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$　　$0<x\leqq\frac{\pi}{3}$ より　$\mathbf{\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

問題3　剰余定理より　$P(1)=2$、$P(2)=3$、…①

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q(x)$　余りを $ax+b$ として

$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

① より　$P(1) = a+b = 2$、　$P(2) = 2a+b = 3$.

これらを解いて、$a=1$、$b=1$.　　余りは $\mathbf{x+1}$ (カ)

同様に　$P(x) = (x-1)^2(x-2)R(x)+cx^2+dx+e$　とおく.

① より　$P(1) = c+d+e = 2$、　$P(2) = 4c+2d+e = 3$

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 2 だから

$cx^2+dx+e = (x-1)^2\times c+2 = cx^2-2cx+c+2$

比較して、$d=-2c$、$e=c+2$　　以上を連立　$c=1$、$d=-2$、$e=3$

余りは $\mathbf{x^2-2x+3}$

北里大学2020 獣医

問題4

(ケ) $_4H_8 = {}_{12-1}C_8 = {}_{11}C_3 = \dfrac{11\cdot \cancel{10}^{5}\cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \mathbf{165}$

(サ) 先に1つずつとっておく。 $_4H_{8-4} = {}_7C_3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = \mathbf{35}$

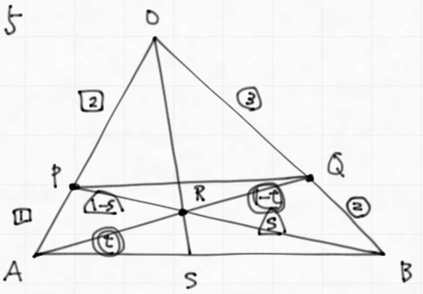
(コ) 0が 2つ $\quad 3\times\dfrac{4!}{2!1!1!} = 36$

0が1つ $\quad 4\times\dfrac{4!}{2!1!1!}\times 3 = 144$

0がない $\quad 3^5 - {}_3C_2(2^5-2) - {}_3C_1\cdot 1^5 = 243-90-3 = 150$

$36 + 144 + 150 = \mathbf{330}$

問題5



$\triangle OPQ = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\triangle OAB = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$

$BR:RP = s:1-s$として $\quad \vec{OR} = s\dfrac{2}{3}\vec{OA} + (1-s)\vec{OB}$ …①

$AR:RQ = t:1-t$として $\quad \vec{OR} = \dfrac{3}{5}t\vec{OB} + (1-t)\vec{OA}$ …②

①②を比較 $\quad \dfrac{2}{3}s = 1-t$, $1-s = \dfrac{3}{5}t$

連立して $\quad t = \dfrac{5}{9}$, $s = \dfrac{2}{3}$

$\vec{OR} = \mathbf{\dfrac{4}{9}}\vec{OA} + \mathbf{\dfrac{1}{3}}\vec{OB} = \dfrac{7}{9}\left(\dfrac{4}{7}\vec{OA} + \dfrac{3}{7}\vec{OB}\right) = \dfrac{7}{9}\vec{OS}$

$AS:SB = 3:4$

$\triangle PQS = \triangle OAB - \triangle OPQ - \triangle APS - \triangle BQS$

$= 1 - \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{7}\times 1 - \dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{7}\times 1 = 1 - \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{8}{35} = \mathbf{\dfrac{8}{35}}$

問題6

$$a_2 = \frac{4a_1+2}{a_1+5} = \frac{4\cdot 2+2}{2+5} = \frac{10}{7}$$

$$a_3 = \frac{4a_2+2}{a_2+5} = \frac{4\cdot\frac{10}{7}+2}{\frac{10}{7}+5} = \frac{40+14}{10+35} = \mathbf{\frac{6}{5}}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-1} = \frac{\frac{4a_n+2}{a_n+5}+2}{\frac{4a_n+2}{a_n+5}-1} = \frac{4a_n+2+2a_n+10}{4a_n+2-a_n-5} = \frac{6a_n+12}{3a_n-3} = \mathbf{2b_n}$$

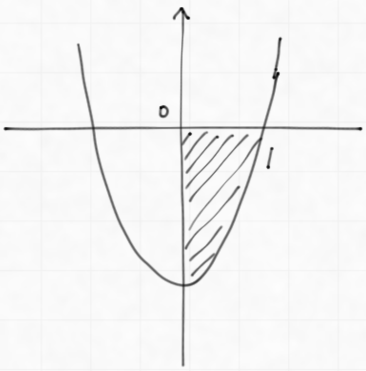
$$b_n = b_1\times 2^{n-1} = \frac{2+2}{2-1}\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$2^{n+1} = \dfrac{a_n+2}{a_n-1}$ より $\quad 2^{n+1}a_n - 2^{n+1} = a_n+2$

$$a_n = \mathbf{\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}-1}}$$

北里大学2020 獣医

7

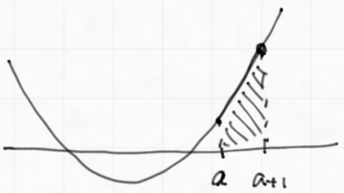


(1) $a=0$ のとき.

$y=12x^2-12$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と $x=0$, $x=1$, $y=0$

で囲まれるのは左図斜線部

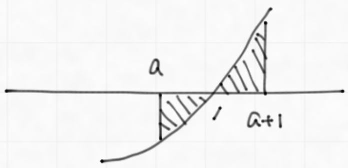
$$S=\int_0^1 -(12x^2-12)\,dx = \left[-4x^3+12x\right]_0^1 = 12-4 = \mathbf{8}$$



(2) 左図斜線部

$$S=\int_a^{a+1} 12x^2-12\,dx = \left[4x^3-12x\right]_a^{a+1} = 4(a+1)^3-12(a+1)-4a^3+12a$$

$$= 12a^2+12a+4-12 = \mathbf{12a^2+12a-8}$$



(3) $0<a<1$ のとき

$$S=\int_a^1 -12x^2+12\,dx + \int_1^{a+1} 12x^2-12\,dx$$

$$= \left[4x^3-12x\right]_1^a + \left[4x^3-12x\right]_1^{a+1}$$

$$= 4a^3-12a+4(a+1)^3-12(a+1)-4+12-4+12$$

$$= 8a^3+12a^2-12a+8$$

$$\frac{dS}{da} = 24a^2+24a-12 = 12(2a^2+2a-1)$$

$\dfrac{dS}{da}=0$ を解くと $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2} = -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0<a<1$ の範囲にあるのは $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$a \geqq 1$ のとき $\dfrac{dS}{da} = 24a+12 = 12(2a+1) > 0$

よって S の増減は次のようになる

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dS}{da}$	/	$-$	0	$+$		$+$
S	8	↘		↗		↗

$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき S は最小.

$$8a^3+12a^2-12a+8 = (2a^2+2a-1)(4a+2)-12a+10$$

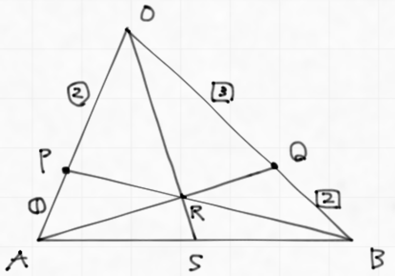
だから $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ を代入して $S=-12\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{2}+10 = \mathbf{-6\sqrt{3}+16}$

3 キ 別解

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)R(x) + c(x-1)^2 + 2$$ と表せる.

$x=2$として $P(2) = c+2 = 3$ $\therefore c=1$ よって余りは $(x-1)^2+2 = $ **x^2-2x+3**

5 メネラウスの定理・チェバの定理を用いるともっと早く解ける



メネラウス $\dfrac{OA}{AP} \times \dfrac{PR}{RB} \times \dfrac{BQ}{QO} = 1$ より $\dfrac{PB}{RB} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{OB}{BQ} \times \dfrac{QR}{RA} \times \dfrac{AP}{PO} = 1$ より $\dfrac{QR}{RA} = \dfrac{4}{5}$

チェバ $\dfrac{BQ}{QO} \times \dfrac{OP}{PA} \times \dfrac{AS}{SB} = 1$ より $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{3}{4}$

メネラウス $\dfrac{AB}{BS} \times \dfrac{SR}{RO} \times \dfrac{OP}{PA} = 1$ より $\dfrac{SR}{RO} = \dfrac{2}{7}$

記述テストではないので、これらの比をもとめることで短時間で答えを導けます.