埼玉大学2021後

1 (1) (i) $n=1$のとき $a_1=1\geqq 1$ は成り立つ

(ii) $n=k$のとき. $a_k\geqq 1$ が成り立つと仮定すると $a_{k+1}=2a_k+3>2\times 1+3>1$

となるので $a_{k+1}\geqq 1$も成り立つ

(i)(ii)より数学的帰納法により全ての自然数nに対して $a_n\geqq 1$ が成り立つ.

次に $b_n>1$を示す.

(i) $n=1$のとき. $b_1=2$ だから $b_1>1$は成り立つ

(ii) $n=k$のとき $b_k>1$ が成り立っていると仮定する.

このとき. $b_{k+1}=\dfrac{4b_k-2}{3b_k-1}=1+\dfrac{b_k-1}{3b_k-1}$

となるが. 仮定より $b_k-1>0$, $3b_k-1>0$ が成り立つので $b_{k+1}>1$ が成り立つ.

(i)(ii)より. 数学的帰納法により全ての自然数nに対して $b_n>1$ が成り立つ.

(2) (i) $n=1$のとき.

左辺 $=a_1b_1=1\times 2=2$, 右辺 $=a_1+1=1+1=2$ だから. $n=1$のとき $a_1b_1=a_1+1$は成り立っている

(ii) $n=k$のとき.

$a_kb_k=a_k+1$ が成り立つと仮定する.

このとき.

$a_{k+1}b_{k+1}=(2a_k+3)\times\dfrac{4b_k-2}{3b_k-1}=(*)$ とする.

ここに仮定より $b_k=\dfrac{a_k+1}{a_k}$ を代入すると.

$$(*)=(2a_k+3)\times\frac{4\times\frac{a_k+1}{a_k}-2}{3\times\frac{a_k+1}{a_k}-1}=\cancel{(2a_k+3)}\times\frac{4a_k+4-2a_k}{\cancel{3a_k+3-a_k}}=2a_k+4=a_{k+1}+1$$

よって仮定の下で $n=k+1$のときも条件は成り立っている.

(i)(ii)より数学的帰納法により全ての自然数nに対して $a_nb_n=a_n+1$ が成り立っている

(3) $a_{n+1}=2a_n+3 \iff a_{n+1}+3=2(a_n+3)$.

これは. $\{a_n+3\}$ が初項 a_1+3, 公比2の等比数列であることを示している.

したがって $\{a_n+3\}$ の一般項 a_n+3は.

$a_n+3=(1+3)\times 2^{n-1}=2^{n+1}$ $\therefore$ $\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-3}$

(2)より

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n}$ ($\because$ $a_n\geqq 1$より $a_n\neq 0$)

が成り立つので

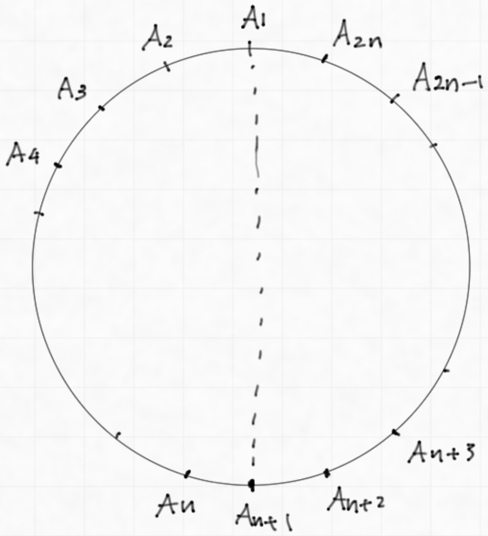
$b_n=\dfrac{2^{n+1}-3+1}{2^{n+1}-3}=\boldsymbol{\dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-3}}$

埼玉大学2021後

2 (1) 直径を含む3点をとればよい。

直径は A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, … A_nA_{2n} の
n本あるので

$$n \times {}_{2n-2}C_1 = n(2n-2)$$
$$= \mathbf{2(n-1)n} \text{ 通り}$$



(2) $\overset{\frown}{A_2A_i}$ が半円よりも長くなったとき、$\angle A_iA_1A_2 > 90°$ となる。そのための条件は

$$i-2 > n$$

で i は $n+2 < i \leqq 2n$ を満たし、$i = n+3, n+4, \cdots, 2n$ の **$n-2$ 通り**

(3) $i < j$ のときのみを考える。

$\angle A_iA_1A_j > 90°$ となるときの条件は (2)と同様に考えて、$j-i > n$ が成り立つときで、
これと $i \geqq 2$, $j \leqq 2n$ を併せ、

$$2 \leqq i < j-n \leqq 2n-n = n$$

$i, j+n$ は $2 \sim n$ のうちの異なる2つの整数となるので

$${}_{n-1}C_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \qquad \therefore \ \mathbf{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \text{ 通り}$$

(4) A_2 を鈍角とする鈍角三角形の総数も (3)と同じ。$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 通り。

$A_3 \ldots A_{2n}$ も全て同じで、三角形の内角の内で鈍角となるのは1つ以下だから、
鈍角三角形の総数は $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \times 2n = n(n-1)(n-2)$

(1)とあわせて

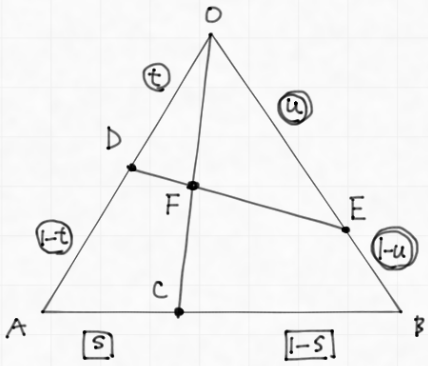
$$p_n = 1 - \frac{(n-2) + n(n-1)(n-2)}{{}_{2n}C_3} = 1 - \frac{\cancel{6}^{\,3}(n-2)(1+n^2-n)}{\cancel{2}n(2n-1)(2n-2)}$$

$$= \mathbf{1 - \frac{3(n-2)(n^2-n+1)}{2n(2n-1)(n-1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{3\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2\cdot1\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right\} = 1 - \frac{3\cdot1\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = 1 - \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

埼玉大学2021後

3



$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく.

(1) $\triangle OAB$ は正三角形だから $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

条件より $\overrightarrow{OC}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\overrightarrow{OD}=t\vec{a}$

$\overrightarrow{OE}=u\vec{b}$

条件(a)より $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DE}=0$

ここに上の条件を代入

$$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(u\vec{b}-t\vec{a})=0$$

$$\frac{1}{2}(1-s)u-(1-s)t+su-\frac{1}{2}st=0$$

$$\left(\frac{1}{2}s-1\right)t=-\frac{1}{2}su-\frac{1}{2}u$$

$$t=\frac{-\frac{1}{2}(su+1)}{\frac{1}{2}s-1}=\frac{u+su}{2-s}$$

(2) 条件(b)について. FがDEを $v:1-v$ に内分するものとして.

$$\overrightarrow{OF}=(1-v)\overrightarrow{OD}+v\overrightarrow{OE}=(1-v)t\vec{a}+vu\vec{b}$$

これと $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ が一致する. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$ だから.

$$\frac{1}{2}(1-s)=(1-v)t,\quad \frac{1}{2}s=vu$$

v を消去して $\frac{1}{2}(1-s)=\left(1-\frac{s}{2u}\right)t$

$$u(1-s)=(2u-s)t \qquad t=\frac{u(1-s)}{2u-s}$$

(3) (1)(2)より $\frac{u(1+s)}{2-s}=\frac{u(1-s)}{2u-s}$ を整理して $u=\frac{s^2-s+1}{1+s}$

$$t=\frac{\cancel{1+s}}{2-s}\times\frac{s^2-s+1}{\cancel{1+s}}=\frac{s^2-s+1}{2-s}$$

(4) $\triangle ODE=\triangle OAB\times t\times u=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ\times\frac{s^2-s+1}{2-s}\times\frac{s^2-s+1}{1+s}$

$$=\frac{\sqrt{3}(s^2-s+1)^2}{4(1+s)(2-s)}$$

埼玉大学2021後

4 (1) $f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \times 2x + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \times \cancel{2}x\right)$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}$

以上より $f'(x) = 2\sqrt{x^2+1}$ が示された.

(2) (i) $xy = \sqrt{2}$ について $x=0$ はこれを満たさないので $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$

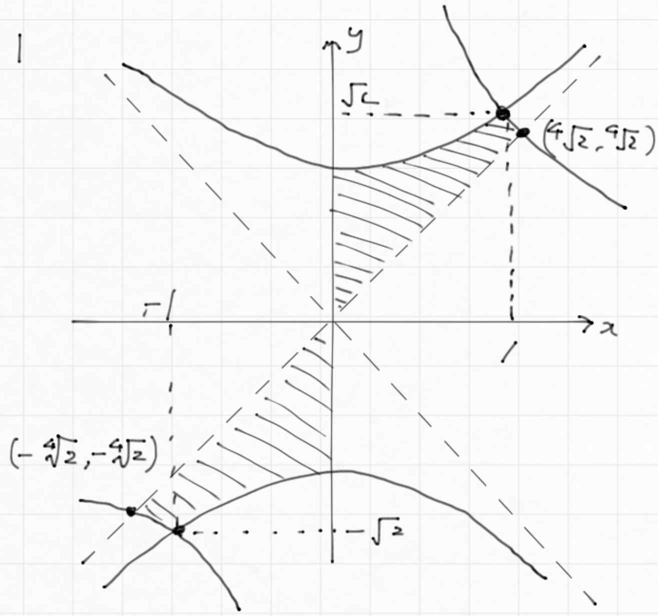
これを $y^2 - x^2 = 1$ に代入 $\frac{2}{x^2} - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)(x^2-1) = 0$ より. $x = \pm 1$

$\therefore (x, y) = \boldsymbol{(\pm 1, \pm\sqrt{2})}$

(ii) $0 \leqq xy \leqq \sqrt{2}$

$$\begin{cases} x > 0 \text{ のとき} & 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{2}}{x} \\ x < 0 \text{ のとき} & 0 \geqq y \geqq \frac{\sqrt{2}}{x} \\ x = 0 \text{ のとき.} & \text{全ての } y \text{ で成立} \end{cases}$$



$y^2 - x^2 \leqq 1$ は右図の双曲線に挟まれた領域

$y^2 - x^2 \geqq 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) \geqq 0$

$y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ と $y = x$ の交点は $(x, y) = (\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$

以上まとめると. 右図斜線部 (境界含む)

(iii) 第1象限の面積をもとめる (これを S とする)　$y^2 - x^2 = 1$ より $y = \sqrt{1+x^2}$

$S = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{\sqrt{2}}{x}\,dx - \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2}$

$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right\}$

$\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{\sqrt{2}}{x}\,dx = \left[\sqrt{2}\log x\right]_1^{\sqrt[4]{2}} = \sqrt{2} \times \frac{1}{4}\log 2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\log 2$

D の面積 $= 2S = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\log 2 - \sqrt{2} = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\log 2}$