1

(1) 1試合だけでは2連勝できず勝者は決まらない $a_1 = \mathbf{0}$

2試合で2連勝できるのは AまたはB $a_2 = \frac{1}{2}\times(1-p) + \frac{1}{2}\times(1-p) = \mathbf{1-p}$

3試合目で2連勝できるのは Cのみ

$$\begin{array}{ccc} A & A & B \\ \circ & \times & \times \\ \times & \circ & \circ \\ B & C & C \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{ccc} A & C & C \\ \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \times \\ B & B & A \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \times \\ \circ \\ B \end{array}$$

は AとBが対戦し、Bが勝ったという意味。以下同じ。

$$a_3 = \frac{1}{2}\times p\times p + \frac{1}{2}\times p\times p = \mathbf{p^2}$$

4試合目

$$\begin{array}{cccc} A & A & B & B \\ \circ & \times & \circ & \circ \\ \times & \circ & \times & \times \\ B & C & C & A \end{array} \quad \text{または。} \quad \begin{array}{cccc} A & C & C & B \\ \times & \circ & \times & \times \\ \circ & \times & \circ & \circ \\ B & B & A & A \end{array}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\times p\times(1-p)\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times p\times(1-p)\times\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}p(1-p)}$$

(2) 緒戦でAが勝ったとき

$$\begin{array}{cccccc} A & A & B & B & C & C \\ \circ & \times & \circ & \times & \circ & \times \\ \times & \circ & \times & \circ & \times & \circ \\ B & C & C & A & A & B \end{array} \quad \cdots\cdots \quad \begin{array}{ccc} B & C & C \\ \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \times \\ A & A & B \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\times p\times(1-p)\times\frac{1}{2}\times p\times(1-p)\times\cdots\cdots\times\frac{1}{2}\times p\times p = \left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\times\frac{1}{2}p^2$$

緒戦でBが勝ったときも同様

$$a_{3k} = 2\times\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\times\frac{1}{2}p^2 = \mathbf{\left\{\frac{p(1-p)}{2}\right\}^{k-1}p^2}$$

(3) Cが勝つのは $3k$ 試合目のみだから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} = \frac{p^2}{1-\frac{p(1-p)}{2}} = \mathbf{\frac{2p^2}{p^2-p+2}}$$

(4) $\frac{2p^2}{p^2-p+2} \geqq \frac{1}{3}$ より $5p^2+p-2 \geqq 0$

6.5 42.25

$p = \frac{N}{100}$ を代入 $\frac{N^2}{2000} + \frac{N}{100} - 2 \geqq 0$

6.4 40.96

$$N^2+20N-4000 \geqq 0 \quad \cdots ①$$

$x^2+20x-4000=0$ の解は $x = -10\pm\sqrt{4100} = -10\pm10\sqrt{41}$

$6.4^2 < 41 < 6.5^2$ より $64 < 10\sqrt{41} < 65$ よって $54 < -10+10\sqrt{41} < 55$

よって①を満たす最小の自然数は **54**

2

(1) $a(x^2+2x)+x^3+2x^2+2-y=0$

aの値にかかわらず成り立つので

$x^2+2x=0$, $x^3+2x^2+2-y=0$

$x=0, -2$

$x=0$ のとき $y=2$

$x=-2$ のとき $y=2$

2つの定点は **(0, 2), (−2, 2)**

(2) $A(-2, 2)$, $B(0, 2)$ Lは $y=2$

$y=2$ と C を連立

$a(x^2+2x)+x^3+2x^2=0$

$(x^2+2x)(x+a)=0$ …①

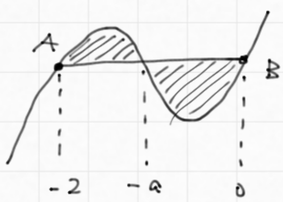
①は $-a\neq 0, -2$ のとき 3つの解をもつ.

またすべての交点が線分AB上にあるのは①の3つの解が $-2\leqq x\leqq 0$ の間にあることで.

その条件は $-2<-a<0$ が成り立つこと.

以上より題意の条件が成り立つのは **$0<a<2$** のとき.

(3)
$$S(a)=\int_{-2}^{-a} x^3+(a+2)x^2+2ax+2-2\,dx+\int_{-a}^{0} 2-x^3-(a+2)x^2-2ax-2\,dx$$



$$=\int_{-2}^{-a} x^3+(a+2)x^2+2ax\,dx+\int_{0}^{-a} x^3+(a+2)x^2+2ax\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3(a+2)+ax^2\right]_{-2}^{-a}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3(a+2)+ax^2\right]_{0}^{-a}$$

$$=\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{2}{3}a^3+a^3\right)\times 2-\left(4-\frac{8}{3}a-\frac{16}{3}+4a\right)$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)=-\frac{2}{3}(a-1)\left\{(a-1)^2-3\right\}$$

$0<a<2$ のとき. $(a-1)^2-3<0$ $S'(a)=0$ となるのは $a=1$ のとき

S(a)の増減は次のようになる

a	0	…	1	…	2
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘		↗	

よって S(a)は $a=1$ で最小.

最小値は $S(1)=\frac{1}{2}$

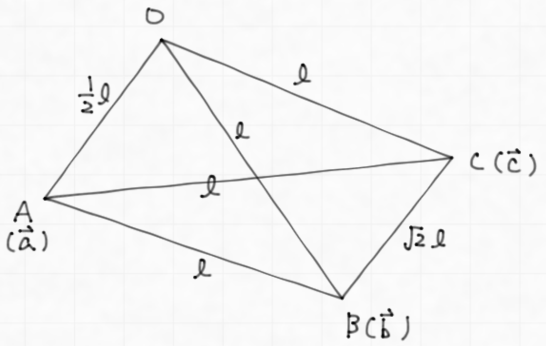
3

(1) $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$

$=\vec{a}+\frac{1}{8}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{8}(\vec{c}-\vec{a})$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$

よってHは平面ABC上に存在する.



(2) $|\vec{a}|=\frac{1}{2}l$, $|\vec{b}|=l$, $|\vec{c}|=l$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2+\frac{1}{4}l^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=l^2$ $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{8}l^2$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2+\frac{1}{4}l^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}=l^2$ $\quad\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{8}l^2$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=l^2+l^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=2l^2$ $\quad\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{1}{64}|6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{64}\left(36\cdot\frac{1}{4}l^2+l^2+l^2+12\cdot\frac{1}{8}l^2+12\cdot\frac{1}{8}l^2+0\right)=\frac{7}{32}l^2$

$\therefore\ |\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}l=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{8}l}$

(3) $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})=\frac{7}{32}l^2-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}|\vec{b}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{7}{32}l^2-\frac{3}{32}l^2-\frac{1}{8}l^2=0$

$\therefore\ \angle OHB=\boldsymbol{90^\circ}$

(4) △ABCを底面として捉える

△ABCの面積は△ABCが∠BAC=90°の直角二等辺三角形であることから $\frac{1}{2}l^2$

高さは$|\overrightarrow{OH}|$の四面体の体積をもとめればよいので

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}l^2\times\frac{\sqrt{14}}{8}l=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{48}l^3}$

4　$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}-\log(1-x)+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1+x}-1-\log(1-x)$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-1+x+1+2x+x^2}{(1+x)(1-x^2)}=\dfrac{x(x+3)}{(1+x)(1-x^2)}$

$f''(x)=0$ となるのは $x=0$ のときで $f'(x)$ の増減は下のようになる

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(0)=1-1-\log 1=0$ なので.

$-1\leqq x\leqq 1$ のとき　$f'(x)\geqq f'(0)=0$ であり.

$f'(x)\geqq 0$ が示された

(2) (1)より $f(x)$ は単調に増加する. また $f(0)=\log 1+\log 1-\log 1=0$ だから

$f(x)$ は　$-1<x<0$ のとき. 負の値,　$0<x<1$ のとき 正の値をとる.

したがって $\dfrac{f(x)}{x}$ は　$-1<x<0$ のとき 正の値.　$0<x<1$ のとき 正の値をとり.

$-1<x<1$, $x\neq 0$ のとき　$\dfrac{f(x)}{x}>0$ が成り立つことが示された.

(3) $f(x)$ に $x=\dfrac{1}{n}$ を代入したとき. (2)より $f(\frac{1}{n})>0$ だから.

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow\quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n\log\frac{n^2-1}{n^2}>\log\frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n>\frac{n-1}{n}\quad\cdots①$$

$\dfrac{f(x)}{x}$ に $x=-\dfrac{1}{n}$ を代入

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=-n\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

$$-n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)>\log\frac{n+1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{-n}>\frac{n+1}{n}$$

逆数をとって

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n<\frac{n}{n+1}$$

両辺に $\dfrac{n^2-1}{n^2}$ をかける

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}\times\frac{(\cancel{n+1})(n-1)}{n^{\cancel{2}}}=\frac{n-1}{n}\quad\cdots②$$

①②より

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\frac{n-1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$　が示された.