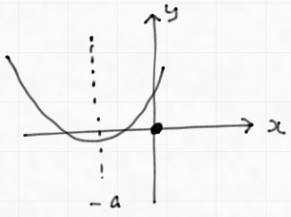
島根大学2021 後

1 (1) $y = x^2 + 2ax + (2a^2 - 3a + 2) = (x+a)^2 + a^2 - 3a + 2$

頂点は $(-a,\ a^2-3a+2)$

(2) 頂点の y 座標が正であれば良い。 $a^2 - 3a + 2 > 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) > 0$ $\therefore a < 1,\ a > 2$

(3) $x^2 + 2ax + 2a^2 - 3a + 2 = f(x)$ とおく。



(i) 軸 $x = -a$ が $x < 0$ の領域にあるとき。

$x > 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので、

$f(0) > 0$ となればよい。

$-a < 0$ より $a > 0$.

$f(0) = 2a^2 - 3a + 2 = 2\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$

よって $a > 0$ のとき、$x > 0$ において $f(x) > 0$ が成り立つ

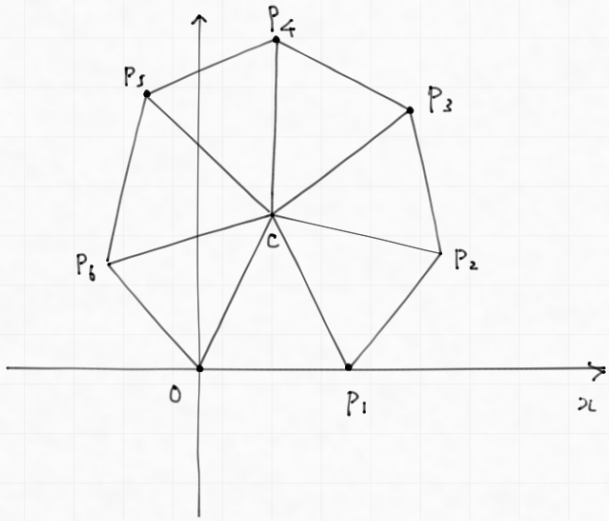
(ii) 軸 $x = -a$ が $x \geqq 0$ の領域にあるとき。

$-a \geqq 0$ より $a \leqq 0$ となるが (2) より、このとき $f(x)$ は任意の x について正の値をとり、

したがって $x > 0$ の範囲でも正の値をとることが分かる

(i)(ii) より、0以上の全ての x に対し $f(x) = y > 0$ が成り立つことが示された。

島根大学2021 後



2 (1) 正七角形の中心をCとする

$|\overrightarrow{OP_1}|=1$ だから $\overrightarrow{OP_1}=(1,0)$

$\angle OCP_1=\frac{2}{7}\pi$, $CO=CP_1$ より $\angle COP_1=\angle CP_1O=\frac{\pi-\frac{2}{7}\pi}{2}=\frac{5}{14}\pi$

よって 頂点P_1の外角の大きさは $\angle xP_1P_2=\pi-\frac{5}{14}\pi\times 2=\frac{2}{7}\pi$

(2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ と x軸正の向きとのなす角(反時計まわりを正とする)は $\frac{2}{7}\pi$

$|\overrightarrow{P_1P_2}|=1$ なので $\overrightarrow{P_1P_2}=(\cos\frac{2}{7}\pi,\ \sin\frac{2}{7}\pi)$

$\overrightarrow{P_2P_3}$ は $\overrightarrow{P_1P_2}$ を反時計まわりに $\frac{2}{7}\pi$ 回転したものだから

$\overrightarrow{P_2P_3}=(\cos\frac{4}{7}\pi,\ \sin\frac{4}{7}\pi)$ 　以上より $a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=4$

(3) (2)と同様に考えて $\overrightarrow{P_3P_4}=(\cos\frac{6}{7}\pi,\ \sin\frac{6}{7}\pi)$, $\overrightarrow{P_4P_5}=(\cos\frac{8}{7}\pi,\ \sin\frac{8}{7}\pi)$, $\overrightarrow{P_5P_6}=(\cos\frac{10}{7}\pi,\ \sin\frac{10}{7}\pi)$

$\overrightarrow{P_6O}=(\cos\frac{12}{7}\pi,\ \sin\frac{12}{7}\pi)$

また、$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\overrightarrow{P_4P_5}+\overrightarrow{P_5P_6}+\overrightarrow{P_6O}=\vec{0}$ だから、ここに上の成分を代入して

$$\begin{cases} 1+\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi=0 & \cdots ① \\ \sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{6}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi+\sin\frac{10}{7}\pi+\sin\frac{12}{7}\pi=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi=-1$

(4) ①の両辺に $\cos\frac{1}{7}\pi$ をかける

$\cos\frac{1}{7}\pi+\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{1}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{1}{7}\pi+\cdots+\cos\frac{12}{7}\pi\cos\frac{1}{7}\pi=0$

$\cos\frac{1}{7}\pi+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{1}{7}\pi\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{13}{7}\pi+\cos\frac{11}{7}\pi\right)=0$

$\frac{3}{2}\cos\frac{1}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{5}{7}\pi+\cdots+\cos\frac{11}{7}\pi+\frac{1}{2}\cos\frac{13}{7}\pi=0$ …③

$\cos\frac{1}{7}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{13}{7}\pi\right)=\cos\frac{13}{7}\pi$ だから

③は $\cos\frac{1}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{5}{7}\pi+\cdots+\cos\frac{11}{7}\pi+\cos\frac{13}{7}\pi=0$ となる。

(4)には多数の別解あり。

- 正十四角形(外角$\frac{\pi}{7}$)を用いて $\sin\frac{1}{7}\pi+\sin\frac{2}{7}\pi+\cdots+\sin\frac{13}{7}\pi=1$ をもとめ、これと(3)を用いる。
- (3)式をS、(4)式をTとし、$S+T=1$ を導いて、$T=1-S=0$ とする。
- $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ とし、$z+z^3+z^5+\cdots z^{13}$ を考える。($z+z^2+\cdots z^{13}=0$ を利用)

他にも、和積公式だけでもなんとかなりそう…

島根大学2021 後

3 (1) $B^3(1)$ は $(2\cdot3-2)\cdot1+1 \leqq k \leqq 2\cdot3\cdot1$ を満たす整数 k 全体の集合　整理して、$5 \leqq k \leqq 6$

よって $\mathbf{B^3(1) = \{5, 6\}}$

$B^3(2)$ は $9 \leqq k \leqq 12$ を満たす整数 k 全体の集合なので $\mathbf{B^3(2) = \{9, 10, 11, 12\}}$

$B^3(3)$ は $13 \leqq k \leqq 18$ を満たす整数 k 全体の集合なので $\mathbf{B^3(3) = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}}$

$B^3(4)$ は $17 \leqq k \leqq 24$ を満たす整数 k 全体の集合なので $\mathbf{B^3(4) = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}}$

(2) $B^n(r) = \{k : (2n-2)r+1 \leqq k \leqq 2nr\}$

$B^n(r+1) = \{k : (2n-2)(r+1)+1 \leqq k \leqq 2n(r+1)\}$

$2nr < (2n-2)(r+1)+1$ となるとき、$B^n(r) \cap B^n(r+1) = \phi$ となる。

整理して $r < n - \frac{1}{2}$ となるので、最大の r は $\mathbf{r = n-1}$

(3) (2)より $B^n(n)$ の最小の要素である $(2n-2)n+1$ より大きな整数は全て $B^n(n), B^n(n+1), \cdots$ のいずれかの要素である。

$1 \sim (2n-2)n$ までの整数のうちで $B^n(1), B^n(2), \cdots B^n(n-1)$ の要素でないものを考える。

$1 \leqq r \leqq n-1$ のとき、$B^n(r)$ の要素の個数は $(2n-2)r+1, (2n-2)r+2, \cdots, 2nr$ の $2nr-(2n-2)r$ 個

したがって $B^n(1), B^n(2), \cdots B^n(n-1)$ の要素の個数は、

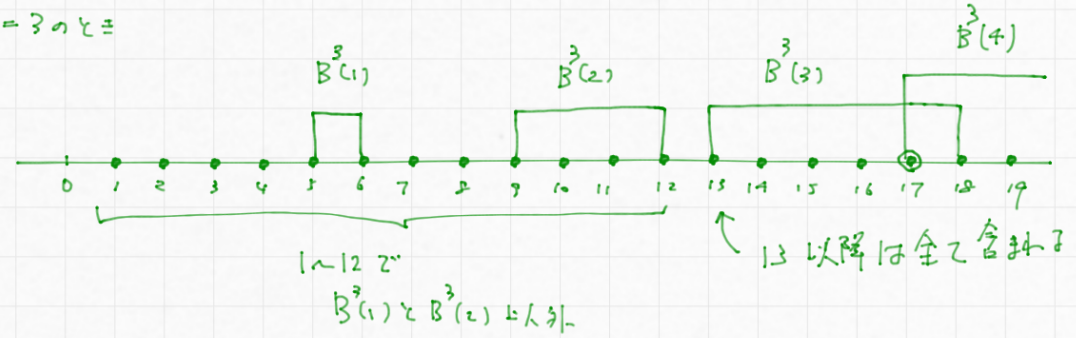
$$\sum_{r=1}^{n-1}\{2nr-(2n-2)r\} = 2\sum_{r=1}^{n-1} r = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(n-1)n = n(n-1) \text{ 個}$$

$1 \sim (2n-2)n$ までで $B^n(1), B^n(2), \cdots B^n(n-1)$ の要素に含まれていないものの個数は

$$(2n-2)n - n(n-1) = n^2 - n = \mathbf{n(n-1)} \text{ 個}$$

(2), (3)について、常に(1)を用いて検算を!!

$n=3$ のとき



島根大学2021 後

4

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1) = n(n+a)$ より $\mathbf{a=1}$ のとき

(2) $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2+4+\cdots+2n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+4+\cdots+2n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2+4+\cdots+2n} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = \mathbf{1}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{3+2n+1}{2}\times n = n(n+2)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3+5+\cdots+(2n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{N-1}}-\frac{1}{N+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(N+1)}-\frac{1}{2(N+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+5+\cdots+(2n+1)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3+5+\cdots+(2n+1)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(N+1)}-\frac{1}{2(N+2)}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}$$