山形大学2022

1

(1) 分母の極限値 $\lim_{x \to 2}(x^2-x-2) = 4-2-2 = 0$ だから 分子の極限値も0に収束する必要性がある

$$\lim_{x \to 2}(ax^2+bx+4) = 4a+2b+4 = 0 \qquad b = -2a-2$$

このとき極限値は

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax^2-2(a+1)x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(ax-2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{2a-2}{3} = 2$$

$\therefore a = 4, \quad b = -2 \times 4 - 2 = -10$ $\qquad$ $(a, b) = $ **$(4, -10)$**

(2) $f(x) = 2x^3-3x^2-12x$ とおく

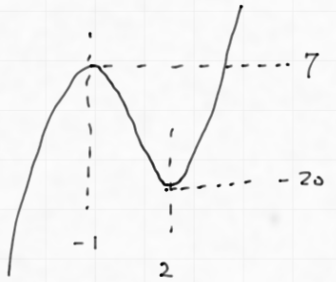
$f'(x) = 6x^2-6x-12 = 6(x-2)(x+1)$

$f'(x) = 0$ を解くと $x = -1, 2$ となるので

$f(x)$ の増減およびグラフは右のようになる

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

$f(-1) = 7, \quad f(2) = -20$



$y = f(x)$ と $y = a$ が異なる3点で交わるのは

$-20 < a < 7$

を満たすときである

(3) α, β が実数だとすると, $0, \alpha, \beta$ は実軸上に並ぶので, $0, \alpha, \beta$ が直角三角形となることはない

したがって α, β は虚数. このとき

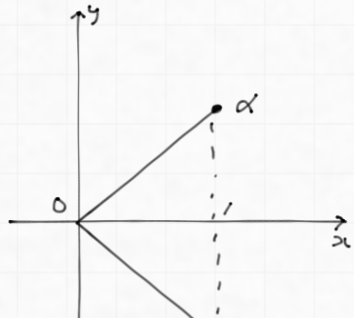
$z^2 - 2z + k = 0 \quad \cdots ①$

① の判別式を D とすると

$\frac{D}{4} = 1^2 - k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 1 \quad \cdots ②$

① は実数係数の2次方程式だから虚数解は互いに共役で $\beta = \bar{\alpha}$

したがって $0, \alpha, \beta\ (=\bar{\alpha})$ は右のように位置し、直角となる可能性があるのは $\angle AOB$ のみ.



$\alpha, \bar{\alpha}$ は ① の解なので $\alpha + \bar{\alpha} = 2, \ \alpha\bar{\alpha} = k$.

これより $OA = OB = |\alpha| = \sqrt{k}$

α の実部は $\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ なので直角三角形となるのは $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{k}$

$\therefore$ **$k = 2$** のとき, $\triangle OAB$ は $\angle AOB = 90^\circ$ の直角三角形 (これは ② を満たしている)

2

(1) ADを通る直線（以下lとする）は

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + t\vec{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (tは任意の実数)$$

lとxy平面の交点は $z = 2 + t = 0$より $t = -2$.

このとき

$$(x, y, z) = (-2, 1, 0) \qquad \mathbf{E\ (-2, 1, 0)}$$

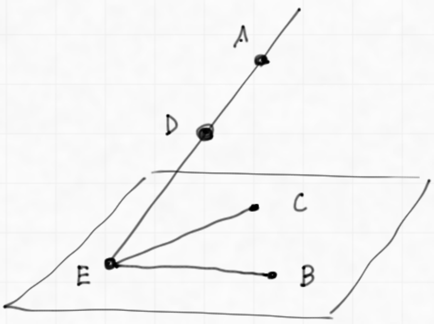
(2) $\vec{CB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{CE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\vec{CB}| = 3\sqrt{5}$, $|\vec{CE}| = 5$, $\vec{CB}\cdot\vec{CE} = 30$ $\qquad \cos\angle BCE = \dfrac{\vec{CB}\cdot\vec{CE}}{|\vec{CB}||\vec{CE}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle BCE = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

(3) $\triangle BCE = \dfrac{1}{2} \times |\vec{CB}| \times |\vec{CE}| \times \sin\angle BCE = \dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \mathbf{\dfrac{15}{2}}$

(4)



四面体AECBの体積は、Aとxy平面との距離がAのz座標の2だから

$$AECDの体積 = \triangle BCE \times 2 \times \frac{1}{3} = 5$$

AE : DEは A, Dのz座標より 2 : 1

よって ABCDの体積は

$$AECD \times \frac{AD}{AE} = 5 \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

3

(1) $a_2 = \dfrac{13a_1+24}{4a_1+17} = \dfrac{39+24}{12+17} = \dfrac{63}{29}$

$b_1 = \dfrac{a_1-2}{a_1+3} = \dfrac{3-2}{3+3} = \dfrac{1}{6}$　　$b_2 = \dfrac{a_2-2}{a_2+3} = \dfrac{\frac{63}{29}-2}{\frac{63}{29}+3} = \dfrac{5}{150} = \dfrac{1}{30}$

(2) $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{13a_n+24}{4a_n+17}-2}{\frac{13a_n+24}{4a_n+17}+3} = \dfrac{13a_n+24-8a_n-34}{13a_n+24+12a_n+51}$

$= \dfrac{5a_n-10}{25a_n+75} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{a_n-2}{a_n+3} = \dfrac{1}{5}b_n$

よって $\{b_n\}$ は等比数列である.

$\{b_n\}$ の一般項は.

$b_n = b_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{6\cdot 5^{n-1}}$

(3) $b_n = \dfrac{a_n-2}{a_n+3}$ より　　$a_n b_n - a_n = -2-3b_n$

$a_n = \dfrac{-2-3b_n}{b_n-1} = \dfrac{3b_n+2}{1-b_n} = \dfrac{\frac{1}{2\cdot 5^{n-1}}+2}{1-\frac{1}{6\cdot 5^{n-1}}} = \dfrac{12\cdot 5^{n-1}+3}{6\cdot 5^{n-1}-1}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2\cdot 5^{n-1}}+2}{1-\frac{1}{6\cdot 5^{n-1}}} = \dfrac{2}{1} = 2$

4

(1) $t=0$ 　$(x,y)=(0,0)$

$t=\frac{\pi}{6}$ 　$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

$t=\frac{\pi}{2}$ 　$(x,y)=(1,\ 0)$

(2) $\frac{dy}{dt} = -\sin t + 2\cos t\sin t = \sin t\,(2\cos t - 1)$

$\frac{dy}{dt}=0$ を解くと　$\sin t=0$ または $\cos t=\frac{1}{2}$ だから.　$t=0,\ \frac{\pi}{3}$

yの増減は次のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

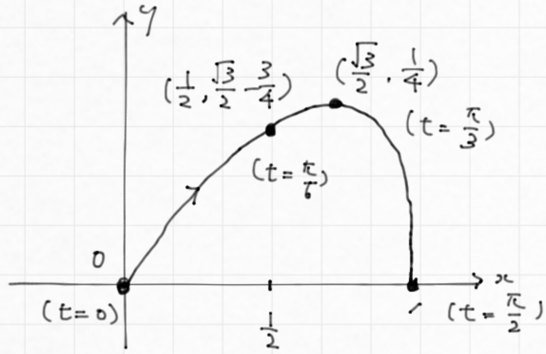
$t=\frac{\pi}{3}$ のとき　$y=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

以上より　$t=\frac{\pi}{3}$ のとき　yは最大.　このとき　$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

(3) $\frac{dx}{dt}=\cos t$ 　　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$\frac{dx}{dt}\geqq 0$

(1) (2) と上の事実より. グラフの概形は右のようになっている



よって. もとめる面積を S として

$$S=\int_0^1 y\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-\cos^2 t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}-\cos t+\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+0-1+\frac{1}{3}-0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$$