龍谷大学2022　2/14

1 (1) $y' = 2x$.

A.Bのx座標を a. b として、接線は

$y = 2a(x-a) + a^2 \iff y = 2ax - a^2$

同様に $y = 2bx - b^2$

両者が直交するとき. $2a \times 2b = -1$.

直線ABは $y = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) + a^2 \iff y = (a+b)x - ab \iff y = (a+b)x + \frac{1}{4}$

y軸との交点は $\boldsymbol{(0, \frac{1}{4})}$

(2) $t\vec{a}+\vec{b} = (t-3,\ 2t+4)$

$\vec{a}\cdot(t\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}||t\vec{a}+\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}$ に値を代入

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t-3\\2t+4\end{pmatrix} = \sqrt{5}\sqrt{(t-3)^2+(2t+4)^2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

$t-3+4t+8 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sqrt{5t^2+10t+25}$

$t+1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+2t+5}$

$t+1 \geqq 0$ のとき 2乗して. $2(t^2+2t+1) = t^2+2t+5$

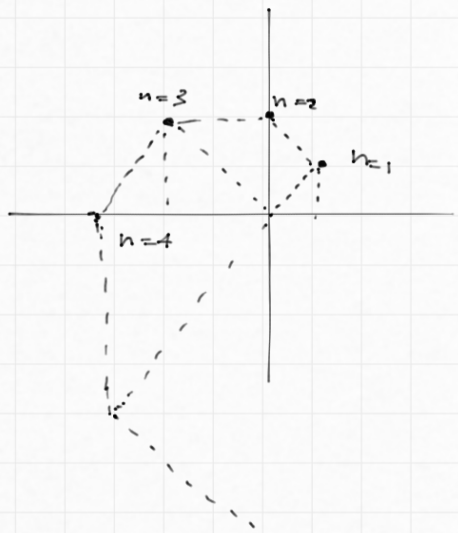
$t^2+2t-3 = 0$　　$\therefore t = 1, -3$

$t+1 \geqq 0$を満たすのは $t = \mathbf{1}$

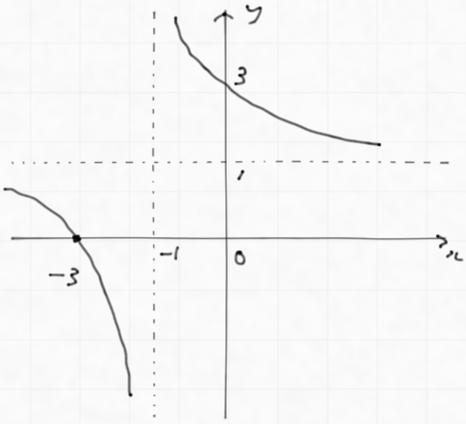
(3) $z = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}n + i\sin\frac{\pi}{4}n\right)$

虚部が $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi}{4}n = 2$ となるnをもとめる.

右図より　$n = \mathbf{2, 3}$ のとき虚部は2となる



2



(1) $x=-1$ のとき. $(x+1)y = x+3$ は成立しない

$x \neq -1$ のとき $y = \frac{x+3}{x+1} = 1+\frac{2}{x+1}$

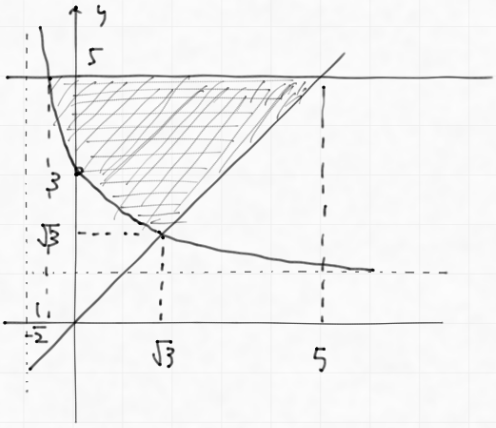
漸近線は $x=-1$. $y=1$

$x=0$ のとき $y=3$.

$y=0$ 〃 $x=-3$

よってグラフは右のようになる (反比例のグラフ)

(2)



$1+\frac{2}{x+1} = x$ を解くと $x = \pm\sqrt{3}$

第1象限の交点は $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$5 = \frac{x+3}{x+1}$ を解くと $x = -\frac{1}{2}$

$$S = (5-\sqrt{3})\left(5-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} 1+\frac{2}{x+1}-\sqrt{3}\,dx - \frac{1}{2}(5-\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{55}{2} - \frac{11}{2}\sqrt{3} - \Big[x + 2\log|x+1| - \sqrt{3}x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} - 14 + 5\sqrt{3}$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\log(1+\sqrt{3}) + 3 - \frac{1}{2} + 2\log\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 16 - \sqrt{3} - 2\log 2(1+\sqrt{3})$$

3

(1) $3_{(10)} = 10_{(3)}$ $f(3) = 1 \times 0 = \mathbf{0}$

$4_{(10)} = 11_{(3)}$ $f(4) = 1 \times 1 = \mathbf{1}$

$80_{(10)} = 2222_{(3)}$ $f(80) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$

(2) $10_{(3)}, 11_{(3)}, 12_{(3)}, 20_{(3)}, 21_{(3)}, 22_{(3)}$

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8) = 0+1+2+0+2+4 = 9$

よって 3進法で2桁で表される全てのnについて $f(n)$ の和は 9 である.

(3) 3桁

$100_{(3)} \sim 222_{(3)}$

0を含まないものは $111_{(3)}, 112_{(3)}, 121_{(3)}, 122_{(3)}, 211_{(3)}, 212_{(3)}, 221_{(3)}, 222_{(3)}$

$$\sum_{k=9}^{26} f(k) = 1+2+2+4+2+4+4+8 = 27.$$

4桁. $1111_{(3)}$ … $f(40) = 1$

$1112_{(3)}$ など.	1が3回 2が1回 … 4種	$2 \times 4 = 8$	
1122 など.	1が2回 2が2回 … 6種	$4 \times 6 = 24$	
1222 など	1が1回 2が3回 … 4種	$8 \times 4 = 32$	合計 81
2222	1が0回 2が4回 … 1種	$2^4 \times 1 = 16$	

2.3.4桁の数を全て足して. $9+27+81 = \mathbf{117}$

4

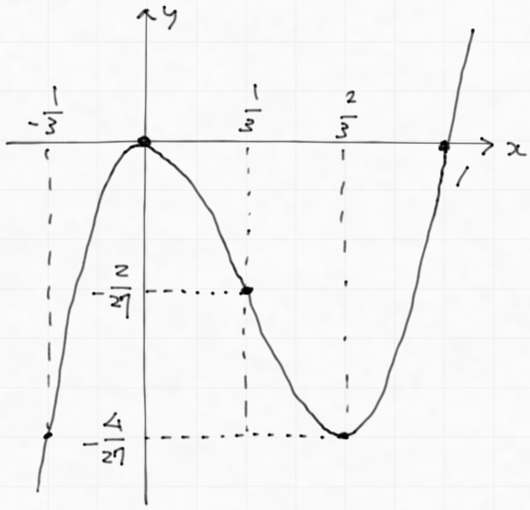
$f(x) = x^3 - x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, \frac{2}{3}$

$f(x)$ の増減は下のとおり。

$f(x)$ のグラフは右のようになる



x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$

(1) $m(-2)$ について。 $-2 \leqq x \leqq -1$ のとき $f(x)$ は単調に増加する

$m(-2) = f(-1) = -1 - 1 = \mathbf{-2}$

(2) $m(-\frac{1}{2})$ について　$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は $x=0$ で極大　$m(-\frac{1}{2}) = f(0) = \mathbf{0}$

(3) $m(\frac{1}{2})$ について　$\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$　$f(\frac{1}{2}) < f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$　$m(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \mathbf{\frac{9}{8}}$

(4) 極大となる $x=0$ のときが範囲に含まれているとき

$t \leqq 0 \leqq t+1 \Leftrightarrow -1 \leqq t \leqq 0$ のとき。 $m(t) = f(0) = 0$

上記以外は $f(t)$ と $f(t+1)$ のいずれか小さくない方が $m(t)$

$f(t) = f(t+1)$ を解くと　$t^3 - t^2 = (t+1)^3 - (t+1)^2 \Leftrightarrow 3t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0, -\frac{1}{3}$