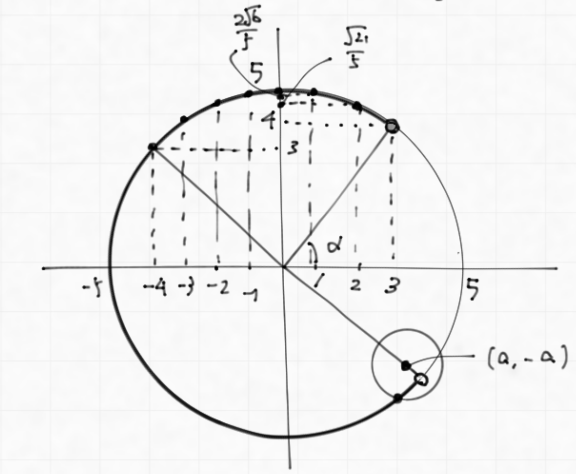
福井大学・医学部2021

1 (1) $y = 4\cos\theta + 3\sin\theta = 5\sin(\theta+\alpha)$ （ただしαは $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ を満たすものとする）

また、 $x = 5\left(\cos\theta\cdot\frac{3}{5} - \sin\theta\cdot\frac{4}{5}\right) = 5(\cos\theta\cdot\cos\alpha - \sin\theta\cdot\sin\alpha) = 5\cos(\theta+\alpha)$



x, yがともに整数となるのは

$5\cos(\theta+\alpha)$, $5\sin(\theta+\alpha)$がともに整数となるときで、

左図より、そのような組み合わせは

$(5\cos(\theta+\alpha), 5\sin(\theta+\alpha)) = (0,5), (-3,4), (-4,3)$

$, (5,0), (-4,-3), (-3,-4), (0,-5), (3,-4)$

$(x, y) =$ **$(0,5), (-3,4), (-4,3), (0,5), (-3,4)$**

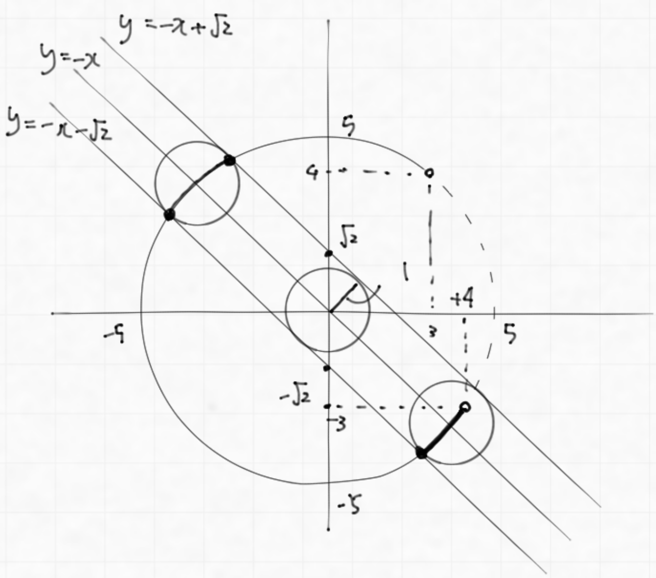
$, (5,0), (-4,-3), (-3,-4), (0,-5), (3,-4)$

(2) 中心$(a, -a)$は $y=-x$ 上にある

このとき、CとSが共有点を持つのは中心間の距離 $\sqrt{a^2+(-a)^2} = \sqrt2 a$ と2円の半径1および5を用いて

$$|5-1| < \sqrt2|a| < |5+1| \iff 2\sqrt2 < |a| < 3\sqrt2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{-3\sqrt2 < a < -2\sqrt2,\ 2\sqrt2 < a < 3\sqrt2}$$



(3) 円の中心の軌跡は $y=-x$ だから、円が通過する領域は傾き-1、y切片が$\sqrt2$, $-\sqrt2$の直線に挟まれる領域（左図）で

$-x-\sqrt2 \leqq y \leqq -x+\sqrt2$

したがって共有点の存在する範囲は左図の太線部

2 (1) 偶数の目が出ると、それ以降、x_n が 0 となることはない。

したがって $x_n=0$ となるのは、$a_1, a_2, \dots a_n$ が全て奇数のときに限られ、その確率は

$$P(x_n=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす k について

$1 \sim k-1$ 回目までは 奇数 $(x_{k-1}=0)$

k 回目は 2　$(x_k=2)$

$k+1 \sim n$ 回目は 1　を満たすとき、$x_n=2$ となる。

よってもとめる確率は

$$P(x_n=2)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=\frac{1}{6^n}\times 1\times\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2\cdot 6^n}$$

(3) (i) k 回目に初めて 2 となり、l 回目で初めて 4 となるとき　$0, 0, 0, \cdots 0, 2, 2, \cdots, 2, 4, 4 \cdots 4$

$(1 \leqq k < l \leqq n)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{l-k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-l}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{(n-k)\frac{3^{k-1}}{6^n}\right\}=S \text{ とおく。}$$

$$-)\quad S=(n-1)\frac{3^0}{6^n}+(n-2)\frac{3^1}{6^n}+(n-3)\frac{3^2}{6^n}+\cdots+1\cdot\frac{3^{n-2}}{6^n}$$

$$3S=\qquad(n-1)\frac{3^1}{6^n}+(n-2)\frac{3^2}{6^n}+\cdots+2\cdot\frac{3^{n-2}}{6^n}+1\cdot\frac{3^{n-1}}{6^n}$$

$$2S=-(n-1)\cdot\frac{3^0}{6^n}+\frac{3^1}{6^n}+\frac{3^2}{6^n}+\cdots+\frac{3^{n-2}}{6^n}+\frac{3^{n-1}}{6^n}$$

$$=-\frac{n-1}{6^n}+\frac{3}{6^n}\times\frac{3^{n-2}-1}{3-1}+\frac{3^{n-1}}{6^n}=\frac{1}{6^n}\left(-n+1+\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{3}{2}+3^{n-1}\right)$$

$$S=\frac{1}{4\cdot 6^n}\left(-2n+3^n-1\right)$$

(ii) k 回目に初めて 4 となり、以下 4 のまま。　$0, 0, 0 \dots 0, 4, 4, \cdots 4$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\frac{3^n-1}{2\cdot 6^n}$$

(i)(ii) あわせて

$$P(x_n=4)=\frac{1}{4\cdot 6^n}\left(3^n-2n-1+2\cdot 3^n-2\right)=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 6^n}$$

福井大学・医学部2021

3 (1) $x>0$ のとき、与式中の $1+x$, $1+a^{1-t}x^t$ は、いずれも正だから、真数条件は成り立っている。

$$f'(x)=\frac{t}{1+x}-\frac{ta^{1-t}x^{t-1}}{1+a^{1-t}x^t}=\frac{t(1-a^{1-t}x^{t-1})}{(1+x)(1+a^{1-t}x^t)}$$

$f'(x)=0$ となるのは $1-a^{1-t}x^{t-1}=0 \iff x^{t-1}=a^{t-1} \iff x=a$

$f(x)$ の増減は下のようになる　$\left(\lim_{x\to+0} x^{t-1}=+\infty \text{ に注意}\right)$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(a)=t\log(1+a)-\log(1+a)=(t-1)\log(1+a)$

$f(x)$ の最小値は $\mathbf{(t-1)\log(1+a)}$　そのときの x は $x=\mathbf{a}$

(2) (1)より $b>0$ のとき

$$f(a)\leqq f(b) \iff (t-1)\log(1+a)\leqq t\log(1+b)-\log(1+a^{1-t}b^t)$$

$$\iff \log(1+b)^t+\log(1+a)^{1-t}\geqq \log(1+a^{1-t}b^t)$$

$$\iff (1+a)^{1-t}(1+b)^t\geqq 1+a^{1-t}b^t$$

証明終

等号成立は (1)より $a=b$ のとき

(3) (2)で $a=728$, $b=728\cdot730$ とすると、

$$(1+728)^{1-t}(1+728\cdot730)^t\geqq 1+728^{1-t}\cdot(728\cdot730)^t$$

$$(3^6)^{1-t}\cdot(9^6)^t\geqq 1+728\cdot730^t$$

$t=\frac{1}{6}$ とすると

$$3^5\cdot9\geqq 1+728\cdot\sqrt[6]{730}$$

$$\sqrt[6]{730}\leqq\frac{3^5\cdot9-1}{728}=3.002\ldots$$

$730>729=3^6$ より $\sqrt[6]{730}>3$ だから、　$\sqrt[6]{729}$ の小数第2位は $\mathbf{0}$

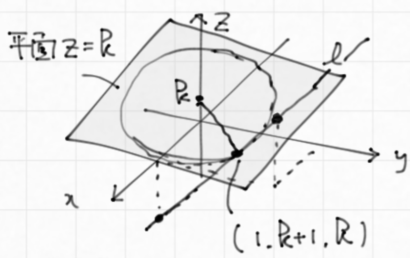
福井大学・医学部2021

4 (1) ℓは Aを通って $\overrightarrow{AB}$ を方向ベクトルに持つ

$$\ell:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\quad(\text{tは任意の実数})$$

ここに $z=0$ を代入すると $t=\frac{1}{2}$ となり. このとき $x=1$, $y=1$. $\therefore (x,y,z)=\mathbf{(1,1,0)}$

(2) $z=k$ $(-1\leqq k\leqq 1)$ と ℓの交点は



$$\begin{pmatrix}x\\y\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

より $t=\frac{k+1}{2}$, $x=1$, $y=k+1$

$(x,y,z)=(1,k+1,k)$ と z軸との距離は $\sqrt{1^2+(k+1)^2}=\sqrt{k^2+2k+2}$

もとめる体積をVとして. $V=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{k^2+2k+2}^{\,2}\,dk=2\pi\left[\frac{1}{3}k^3+2k\right]_0^1=\mathbf{\frac{14}{3}\pi}$

(3) αの法線ベクトルの1つは $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ の両方に垂直なベクトルだから $(0,-1,1)$

αは原点を通るので $\alpha:\ -y+z=0$

$z=k$のとき Sは $x^2+y^2=k^2+2k+2$ だから. αとSの交点は. kを用いて.

$x^2+\cancel{k^2}=\cancel{k^2}+2k+2$ $\quad x=\pm\sqrt{2k+2}$ $\quad (x,y,z)=(\pm\sqrt{2k+2},k,k)$

その xy平面に対する正射影は $(\pm\sqrt{2k+2},k,0)=(u,v,0)$

$u=\pm\sqrt{2k+2}$ より $u^2=2k+2$

ここに $k=v$ を代入 $\quad u^2=2v+2$ $\quad \mathbf{v=\frac{u^2-2}{2}}$