三重大学2022（医）前期

1 (1) 底を3として対数をとる

$$\log_3 a_{n+1} = 5\log_3 a_n + 1$$

$$\log_3 a_{n+1} + \frac{1}{4} = 5\left(\log_3 a_n + \frac{1}{4}\right)$$

$$\log_3 a_n + \frac{1}{4} = \left(\log_3 a_1 + \frac{1}{4}\right)\cdot 5^{n-1}$$

$$\log_3 a_n = \frac{1}{4}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ a_n = 3^{\frac{5^{n-1}-1}{4}}$$

(2) 底2の対数をとる

$$\log_2 a \leqq \left(3 - \log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 b\right)\log_2 \frac{1}{2}$$

底を2に揃え整理する

$$\log_2 a \leqq -3 - \log_2 x - \log_2 b$$

$$\log_2 x \leqq -\log_2 a - 3 - \log_2 b = -\log_2 8ab$$

$$x \leqq \frac{1}{8ab}$$

$$\therefore\ 0 < x \leqq \frac{1}{8ab}$$

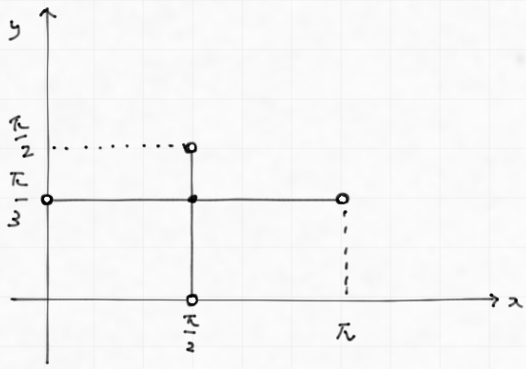
(3) $\cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos x$

$= 2\cos x\cos y - \cos x$

$= \cos x(2\cos y - 1) = 0$

$\cos x = 0$ または $\cos y = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ または $y = \frac{\pi}{3}$

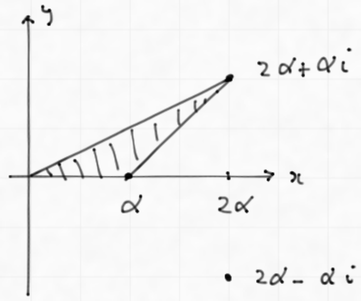


(4) $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\beta^2 - 4\alpha\beta + 5\alpha^2 = 0$

$\beta = 2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha^2}$

$\quad = \alpha(2 \pm i)$



右図斜線部の面積は1だから

$\alpha \times \alpha \times \frac{1}{2} = 1 \qquad \alpha = \sqrt{2}$

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{2},\ (2\pm i)\sqrt{2})$$

(5) Aから赤, Bから白をとり出す $\quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{8+1} = \frac{1}{5}$

Aから白 Bから白をとり出す $\quad \frac{2}{5} \times \frac{3+1}{8+1} = \frac{8}{45}$

もとめる条件つき確率は $\quad \dfrac{\frac{8}{45}}{\frac{1}{5} + \frac{8}{45}} = \dfrac{8}{9+8} = \dfrac{8}{17}$

2

(1) $\vec{a_1}\cdot\vec{b_2} = \begin{pmatrix} x_1+2s \\ y_1+s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+s \\ -3-2s \end{pmatrix}$

$= x_1 + x_1 s + 2s + \cancel{2s^2} - 3y_1 - 2sy_1 - 3s - \cancel{2s^2}$

$= x_1 - 3y_1 + s(x_1 - 2y - 1)$

$= 10 + 7s$

これがsの値にかかわらず成り立つので

$x_1 - 3y_1 = 10,\quad x_1 - 2y_1 - 1 = 7$

連立して. $\boldsymbol{x_1 = 4,\ y_1 = -2}$

同様に $\vec{a_2}\cdot\vec{b_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2+s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3-2s \\ -1-s \end{pmatrix} = -3x_2 - 2sx_2 - y_2 - y_2 s - s - s^2 = -12 - 7s - s^2$ より

$-3x_2 - y_2 = -12,\quad -2x_2 - y_2 - 1 = -7 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x_2 = 6,\ y_2 = -6}$

(2) $\vec{a_1}\cdot\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 4+2s \\ -2+s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -6+s \end{pmatrix} = 24 + 12s + 12 - 2s - 6s + s^2 = \boldsymbol{s^2 + 4s + 36}$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -3-2s \\ -1-s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+s \\ -3-2s \end{pmatrix} = \cancel{-3} - \cancel{3s} - \cancel{2s} - \cancel{2s^2} + \cancel{3} + \cancel{2s} + \cancel{3s} + \cancel{2s^2} = \boldsymbol{0}$

$\vec{c_1}\cdot\vec{c_2} = (\vec{a_1} + t\vec{b_1})\cdot(\vec{a_2} + t\vec{b_2}) = s^2 + 4s + 36 + t(10 + 7s) + t(-12 - 7s - s^2) + 0$

$= s^2 + 4s + 36 + t(-s^2 - 2) = 0$

$t = \boldsymbol{\dfrac{s^2+4s+36}{s^2+2}}$

(3) $\vec{c_1} = \vec{a_1} + t\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 4+2s \\ -2+s \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3-2s \\ -1-s \end{pmatrix} \qquad \vec{c_2} = \vec{a_2} + t\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6+s \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1+s \\ -3-2s \end{pmatrix}$

$\vec{c_1} \perp \vec{c_2}$ のとき. (2)より $t = \dfrac{s^2+4s+36}{s^2+2}$ が成り立つ. このとき. $\vec{c_1}$ の x成分と $\vec{c_2}$ の y成分の差は

$4 + 2s + 6 - s = 10 + s$ となるがこれは整数だから. sは整数.

また $\vec{c_1}$ の x成分と y成分の2倍の差をとると $8 - t$ となるが. これも整数だから tは整数.

s. t が整数のとき. $\vec{c_1}, \vec{c_2}$ の全ての成分が整数となるのは明らか.

$t = \dfrac{s^2+4s+36}{s^2+2} = 1 + \dfrac{4s+34}{s^2+2}$

ここで $\dfrac{4s+34}{s^2+2}$ について. sは正なので. これは正の整数であり. したがって $\dfrac{4s+34}{s^2+2} \geqq 1$ が必要.

これを解くと. $s^2 + 2 \leqq 4s + 34 \iff s^2 - 4s - 32 \leqq 0 \iff -4 \leqq s \leqq 8$

sは1〜8までの整数に限られる. $\dfrac{4s+34}{s^2+2} = f(s)$ と表すと

$f(1) = \dfrac{37}{3}$. $f(2) = \dfrac{42}{6} = 7$. $f(3) = \dfrac{46}{11}$. $f(4) = \dfrac{50}{18}$. $f(5) = \dfrac{54}{27} = 2$.

$f(6) = \dfrac{58}{38}$. $f(7) = \dfrac{62}{51}$. $f(8) = \dfrac{66}{66} = 1$

よって $\boldsymbol{s = 2, 5, 8}$ の3つ

3

(1) $\int_0^1 x^{n-1} e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} dx = I$ とおく.

$\frac{n-1}{n}x^n = t$ とおく　$\frac{dt}{dx} = (n-1)x^{n-1}$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{n-1}{n}$

$$I = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \cancel{x^{n-1}} e^{-t-\frac{1}{n}} \frac{1}{(n-1)\cancel{x^{n-1}}} dt$$

$$= \frac{1}{n-1} e^{-\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{n-1}{n}} e^{-t} dt = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n-1}\left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{n-1}{n}} = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n-1}\left(-e^{-\frac{n-1}{n}}+1\right) = \frac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{-1}\right)$$

(2) 右辺 − 左辺 $= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \log x = f(x)$ とおく.

$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

$x>0$ で $f'(x) = 0$ となるのは $x=1$ のときで.

$f(x)$の増減は右のようになる

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘		↗

$x>0$ のとき　$f(x) \geqq f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \log 1 = 0$

よって $x>0$ において $f(x) \geqq 0$ であり. $\log x \leqq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ が成り立つことが示された.

この不等式より.

$$(n-3)\log x - \frac{n-1}{n}x^n + x^2 - \frac{1}{n} \leqq (n-3)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{n-1}{n}x^n + x^2 - \frac{1}{n}$$

が成り立つ. 右辺を$g(x)$として.

$g'(x) = (n-1)x - (n-1)x^{n-1} = (n-1)x\left(1 - x^{n-2}\right)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗		↘

$g'(x) = 0$ となるのは $x=1$ のときで. $g(x)$の増減は右のようになる

したがって $x>0$において　$g(x) \leqq g(1) = 0 - \frac{n-1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 0$

よって $x>0$において. $g(x) \leqq 0$ であり　$(n-3)\log x - \frac{n-1}{n}x^n + x^2 - \frac{1}{n} \leqq 0$ が成り立つことが示された.

(3) (2)より　$(n-1)\log x - \frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n} \leqq 2\log x - x^2$

$$\log x^{n-1} + \log e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} \leqq \log x^2 + \log e^{-x^2}$$

$$\log x^{n-1} \cdot e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} \leqq \log x^2 \cdot e^{-x^2} \qquad \therefore\ x^{n-1} \cdot e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} \leqq x^2 e^{-x^2}$$

上の不等式を $0 \leqq x \leqq 1$の範囲で積分

$$\int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} dx \leqq \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\frac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{-1}\right) \leqq -\frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot \left(-2x e^{-x^2}\right) dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$\frac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{-1}\right) \leqq -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$n=3$とすると　$\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1}\right) \leqq -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} dx$

整理して　$e^{-\frac{1}{3}} \leqq \int_0^1 e^{-x^2} dx$　が成り立つことが示された.