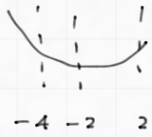
東海大学2022

1 (1) $x^2+2x-8 \leqq 0 \iff (x+4)(x-2) \leqq 0 \iff -4 \leqq x \leqq 2$

$y = ax^2+4ax+a+2 = a(x+2)^2-3a+2$



$a<0$ のとき $x=-2$ で最大 $-3a+2=8$ $a=-2$

$a>0$ 〃 $x=2$ で最大 $13a+2=8$ $a=\frac{6}{13}$

$a=-2,\ \frac{6}{13}$

(2) 赤をとり出す… $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 白をとり出す… $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

もとめる確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_4C_2 = \frac{2^2\times 6}{81} = \frac{8}{27}$

(3) $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ $\left(\because \frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi\right)$

$= -\sqrt{1-\frac{24}{49}} = -\frac{5}{7} = 2\cos^2\alpha - 1$ $\cos^2\alpha = \frac{1}{7}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$ $\left(\because \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(4) 与式は $a_{n+1}+2 = 3(a_n+2)$ と変形できる.

$\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2(=6)$, 公比3の等比数列

$a_n+2 = 6\cdot 3^{n-1}$ $\therefore a_n = 2\cdot 3^n - 2$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 6\times\frac{3^n-1}{3-1} - 2n = 3^{n+1}-2n-3$

(5) $a+b+c+d = 4\times 4 = 16$

$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - 4^2 = 5 \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 84$

$e+f+g+h = 4\times 4 = 16$

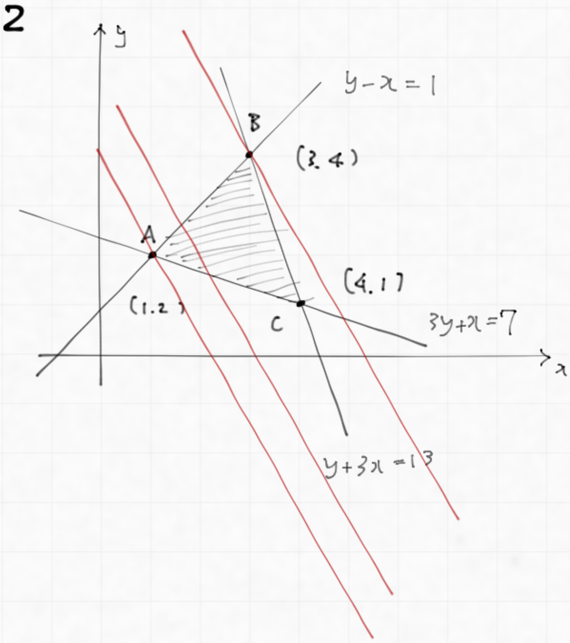
$\frac{e^2+f^2+c^2+d^2}{4} - 4^2 = 20 \iff e^2+f^2+c^2+d^2 = 144$

$\frac{1}{8}(a+b+c+d+e+f+g+h) = \frac{1}{8}(16+16) = 4$

$\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2) = \frac{1}{8}(84+144) = \frac{228}{8} = 28.5$

$28.5 - 4^2 = 12.5$

2



(1) 交点をもとめる. (左図)

A (**1**. **2**). B (**3**. **4**). C (**4**. **1**)

(2) $\vec{AB}=(2,2)$. $\vec{AC}=(3,-1)$

面積の公式より $\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|2\cdot(-1)-2\cdot3\right|=\mathbf{4}$

BCの中点は $\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$

この点とAを結ぶ直線が△ABCを二等分する.

$$y=\frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{7}{2}-1}(x-1)+2$$

$$\Leftrightarrow\ y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}$$

$2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$ …①

これを上のグラフに書き足す. (直線とDは共有点をもつ)

kは①の関数(傾き−2の直線)の切片に相当する.

kが最も小さくなるのは $(x,y)=(1,2)$ のときで. $k=2\cdot1+2=\mathbf{4}$

kが最も大きくなるのは $(x,y)=(3,4)$ のときで. $k=2\cdot3+4=\mathbf{10}$

(4) A, B, Cを通る円は

$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ と表せる.

A(1,2)を通るので $1+4+2a+4b+c=0$ …①

B(3,4) 〃 $9+16+6a+8b+c=0$ …②

C(4,1) 〃 $16+1+8a+2b+c=0$ …③

②−① $a+b+5=0$ …④

③−① $6+3a-b=0$ …⑤

④+⑤ $4a+11=0$ $a=-\frac{11}{4}$ $b=-\frac{9}{4}$ $c=\frac{19}{2}$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{25}{8}$$

中心は $\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4}\right)$. 半径は $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

3

$$L=(\log_a b)^2+(\log_{b^2}\sqrt{a})^2=(\log_a b)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}}{2\log_a b}\right)^2=(\log_a b)^2+\left(\frac{1}{4\log_a b}\right)^2 \quad \cdots ①$$

(1) $(\log_a b)(\log_{b^2}\sqrt{a})=(\log_a b)\times\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\log_a b}\right)=\frac{1}{4}$

(2) ①に $b=a^2$ を代入

$$L=(\log_a a^2)^2+\left(\frac{1}{4\log_a a^2}\right)^2=4+\frac{1}{64}=\frac{257}{64}$$

$$\log_{\sqrt{a}} b=\log_{b^3} a^2 \iff 2\log_a b=\frac{2}{3\log_a b} \iff (\log_a b)^2=\frac{1}{3}$$

$$L=\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\times 3=\frac{25}{48}$$

(3) $L=\frac{5}{8}=(\log_a b)^2+\frac{1}{(4\log_a b)^2}$

$\log_a b=X$ とおくと $\frac{5}{8}=X^2+\frac{1}{16X^2} \iff 16X^4-10X^2+1=0$

$\iff (8X^2-1)(2X^2-1)=0 \iff X^2=\frac{1}{8},\frac{1}{2} \iff (\log_a b)^2=\frac{1}{8},\frac{1}{2}$

$\log_a b=\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad b=a^{\frac{\sqrt{2}}{4}},\ a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(4) $a=16$ のとき.

$$L=(\log_{16} b)^2+\left(\frac{1}{4\log_{16} b}\right)^2\leqq\frac{97}{144}$$

$$\left(\frac{\log_2 b}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{\log_2 b}\right)^2\leqq\frac{97}{144}$$

$\log_2 b=B$ とおく $\quad \frac{B^2}{16}+\frac{1}{B^2}\leqq\frac{97}{144}$

$$9B^4+144-97B^2\leqq 0$$

$$(9B^2-16)(B^2-9)\leqq 0$$

$$\frac{16}{9}\leqq B^2\leqq 9$$

$$\frac{4}{3}\leqq\log_2 b\leqq 3$$

$$2^{\frac{4}{3}}\leqq b\leqq 2^3=8$$

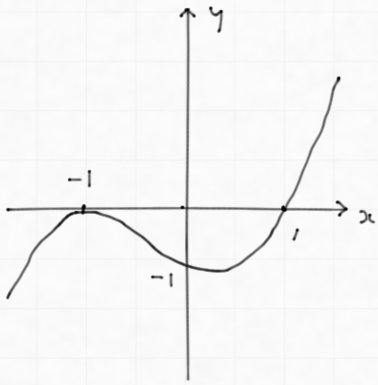
$b=3.4.5.6.7.8$ の **6** 個 $\quad$ 最大のものは **8**

4

(1) $y = x^3+x^2-x-1$

$= x^2(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$

したがって x 軸との共有点は $(x, y) = (-1, 0), (1, 0)$



$y' = 3x^2+2x-1 = (3x-1)(x+1)$

$y'=0$ となるのは $x = \frac{1}{3}, -1$

グラフの増減は下のようになる

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

関数の極大値は $x=-1$ のときで **0**

極小値は $x=\frac{1}{3}$ のときで $-\mathbf{\frac{32}{27}}$

(2) C上の (t, t^3+t^2-t-1) における接線は.

$y = (3t^2+2t-1)(x-t)+t^3+t^2-t-1$

$= (3t^2+2t-1)x-2t^3-t^2-1$

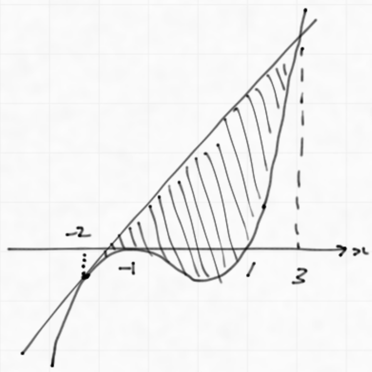
これが $(-2, -3)$ を通るとき.

$-3 = -2(3t^2+2t-1)-2t^3-t^2-1$

$2t^3+7t^2+4t-4=0$

$(t+2)(2t^2+3t-2)=0$

$(t+2)^2(2t-1)=0 \qquad \therefore \quad t=-2, \frac{1}{2}$



$t=\frac{1}{2}$ のとき $\quad l: y = \mathbf{\frac{3}{4}}x - \mathbf{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ C と l の共有点は. $x = -2, \mathbf{\frac{1}{2}}$

$t=-2$ のとき $\quad m: y = \mathbf{7}x+\mathbf{11}$

C と m の共有点 $\quad x^3+x^2-x-1 = 7x+11 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-3)=0$ より $\quad x=-2, \mathbf{3}$

(3) $S = \int_{-2}^{3} -(x+2)^2(x-3)\,dx = \int_{-2}^{3} -(x+2)^3+5(x+2)^2\,dx$

$= \left[-\frac{1}{4}(x+2)^4+\frac{5}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{3} = -\frac{1}{4}\times5^4+\frac{5}{3}\times5^3 = 5^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{625}{12}}$