京都工芸繊維大学2021

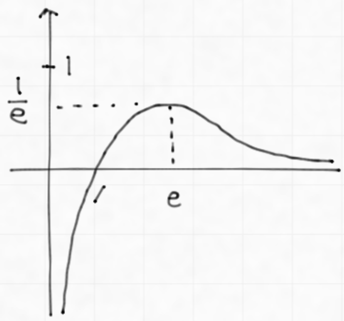
1 (1) $f(t) = \dfrac{\log t}{t}$

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t - \log t}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2}$$

$f'(t) = 0$ となるのは $\log t = 1$ すなわち $t = e$ のとき.

したがって $f(t)$ の増減は右のようになる

t	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(t)$	/	$+$	0	$-$
$f(t)$	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘



よって $f(t)$ は $t = e$ のとき最大となり最大値は $f(e) = \dfrac{1}{e}$

(2) $g(x) = e^{ax} + 2e^{-ax} + (2 - a^2)x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

$$g'(x) = ae^{ax} - 2ae^{-ax} + 2 - a^2$$

$$= \frac{ae^{2ax} + (2 - a^2)e^{ax} - 2a}{e^{ax}} = \frac{(ae^{ax} + 2)(e^{ax} - a)}{e^{ax}}$$

$g'(x) = 0$ となるのは $ae^{ax} > 0$ だから $e^{ax} = a$ すなわち $x = \dfrac{\log a}{a}$ のときになる.

$\dfrac{\log a}{a} = f(a)$ だから. $a > 1$ のとき $0 < f(a) \leqq \dfrac{1}{e} < 1$

このとき、$g(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}\log a$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

$$g\left(\frac{\log a}{a}\right) = e^{\log a} + 2e^{-\log a} + (2 - a^2)\frac{\log a}{a}$$

$$= a + \frac{2}{a} + \left(\frac{2}{a} - a\right)\log a$$

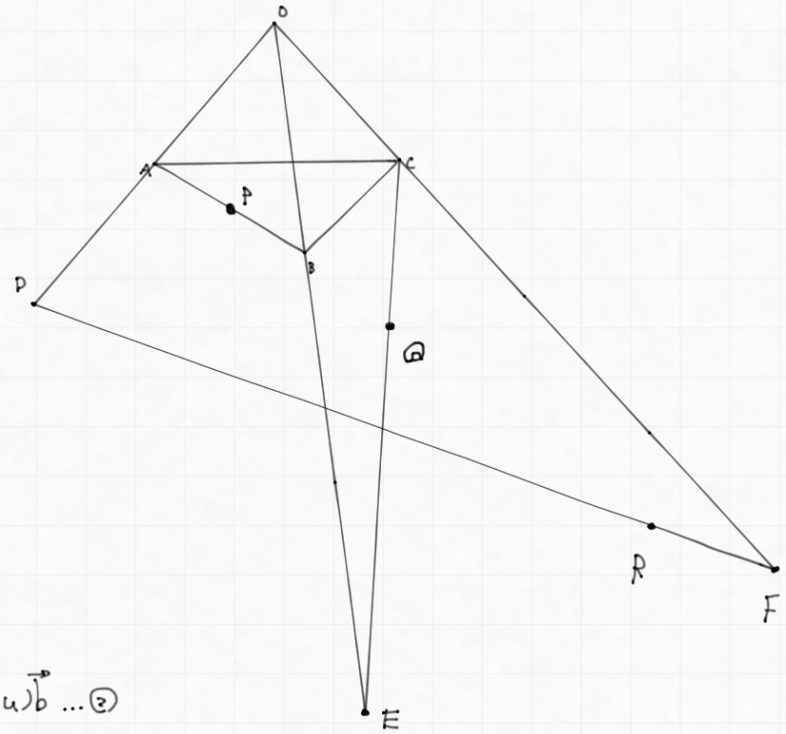
$a \leqq 1$ のとき. $f(a) < 0$ だから. $0 \leqq x \leqq 1$ で $g(x)$ は単調に増加する

このとき $g(x) \geqq g(0) = 1 + 2 = 3$.

以上より $g(x)$ の最小値は

$$\begin{cases} a + \dfrac{2}{a} + \left(\dfrac{2}{a} - a\right)\log a & (a > 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (0 < a \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

京都工芸繊維大学2021



2　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ と表す

条件より　$\overrightarrow{OD}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OE}=3\vec{b}$. $\overrightarrow{OF}=4\vec{c}$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$EQ:QC=s:1-s$ として

$$\overrightarrow{OQ}=s\vec{c}+(1-s)\overrightarrow{OE}=s\vec{c}+3(1-s)\vec{b}\ \cdots①$$

$DR:RF=t:1-t$ として

$$\overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OF}+(1-t)\overrightarrow{OD}=4t\vec{c}+2(1-t)\vec{a}$$

Qが PRを $u:1-u$ に内分するものとすると

$$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OR}+(1-u)\overrightarrow{OP}$$

$$=4tu\vec{c}+2u(1-t)\vec{a}+\frac{1}{2}(1-u)\vec{a}+\frac{1}{2}(1-u)\vec{b}\ \cdots②$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は互いに1次独立だから ① ② を比較して.

$$\begin{cases} 0=2u(1-t)+\frac{1}{2}(1-u) & \cdots③ \\ 3(1-s)=\frac{1}{2}(1-u) & \cdots④ \\ s=4tu & \cdots⑤ \end{cases}$$

④ より　$u=6s-5$ を ③ に代入

$$2(6s-5)(1-t)+\frac{1}{2}(1-6s+5)=0 \iff 12st-9s-10t+7=0\ \cdots⑥$$

⑤ に代入

$$s=4t(6s-5) \iff s+20t-24ts=0\ \cdots⑦$$

⑥ ×2 +⑦

$$s=\frac{14}{17}\qquad t=-\frac{7}{2}\ ,\ u=-\frac{1}{17}$$

よって　$EQ:QC=s:1-s=\frac{14}{17}:\frac{3}{17}=$ **14:3**

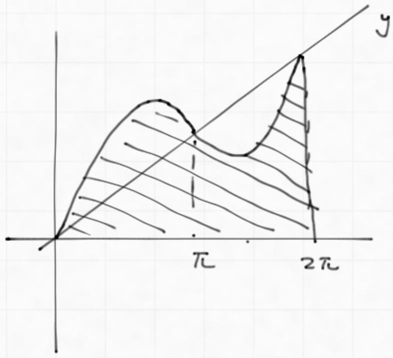
$PQ:QR=|u|:1-u=\frac{1}{17}:\frac{18}{17}=$ **1:18**

京都工芸繊維大学2021

3

$x\sin x$　　$-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$-x\cos x+\sin x$



$$V=\int_0^{2\pi}\pi|ax+\sin x|^2dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2x^2+2ax\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}a^2x^3-2ax\cos x+2a\sin x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$=\pi\left(\frac{8}{3}a^2\pi^3-4a\pi\times 1+0+\pi-0\right)-\pi(0-0+0+0+0)$$

$$=\frac{8}{3}a^2\pi^4-4a\pi^2+\pi^2$$

$$=\frac{8}{3}\pi^4\left(a^2-\frac{3}{2\pi^2}a\right)+\pi^2=\frac{8}{3}\pi^4\left(a-\frac{3}{4\pi^2}\right)^2-\frac{8}{3}\pi^4\times\left(\frac{3}{4\pi^2}\right)^2+\pi^2$$

$$=\frac{8}{3}\pi^4\left(a-\frac{3}{4\pi^2}\right)^2+\pi^2-\frac{3}{2}$$

$a=\frac{3}{4\pi^2}$ のとき 最小となり 最小値は $\pi^2-\frac{3}{2}$

京都工芸繊維大学2021

4 (1) (i) $m=2m'$とおく $(m'=1,2,3\cdots)$

$$m^{m-1}+1=(2m')^{2m'-1}+1=2^{2m'-1}\cdot m'^{2m'-1}+1=2^3\cdot 2^{2m'-4}+1$$

$m'\geqq 2$のとき $2^{2m'-4}\geqq 1$であり, $2^3\cdot 2^{2m'-4}$は8で割り切れるので.

$m^{m-1}+1$を8で割った余りは1.

$m'=1$のとき. $2^{2-1}+1=3$だから $m^{m-1}+1$を8で割った余りは3.

$$\begin{cases} m=2\text{のとき 余りは}3. \\ m=4,6,8\cdots \text{のとき 余りは}1 \end{cases}$$

(ii) $m\equiv 1 \pmod 8$のとき　　以下合同式は全て8を法とする.

$$m^{m-1}+1\equiv 1^{m-1}+1\equiv 2$$

$m\equiv 3$のとき　$m^{m-1}+1\equiv 3^{m-1}+1\equiv 3^{2^{\frac{m-1}{2}}}+1=1^{\frac{m-1}{2}}+1\equiv 2$　$(\because \frac{m-1}{2}$は整数$)$

$m\equiv 5$ 〃　$m^{m-1}+1\equiv 5^{m-1}+1\equiv 5^{2^{\frac{m-1}{2}}}+1\equiv 25^{\frac{m-1}{2}}+1\equiv 1^{\frac{m-1}{2}}+1\equiv 2$

$m\equiv 7$ 〃　$m^{m-1}+1\equiv 7^{m-1}+1\equiv 7^{2^{\frac{m-1}{2}}}+1\equiv 49^{\frac{m-1}{2}}+1\equiv 1^{\frac{m-1}{2}}+1\equiv 2$

よって mが奇数のとき $m^{m-1}+1$を8で割った余りは **2**

(2) $z=\sin\theta+i\cos\theta$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$z^n=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)n+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)n$$

	実部	虚部
$n=4m$ $(m=1,2,3\cdots$ 以下同じ$)$のとき $z^n=\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)$	$\cos(n\theta)$	$-\sin(n\theta)$
$n=4m-1$のとき $z^n=-\sin(n\theta)-i\cos(n\theta)$	$-\sin(n\theta)$	$-\cos(n\theta)$
$n=4m-2$のとき $z^n=-\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$-\cos(n\theta)$	$\sin(n\theta)$
$n=4m-3$のとき. $z^n=\sin(n\theta)+i\cos(n\theta)$	$\sin(n\theta)$	$\cos(n\theta)$