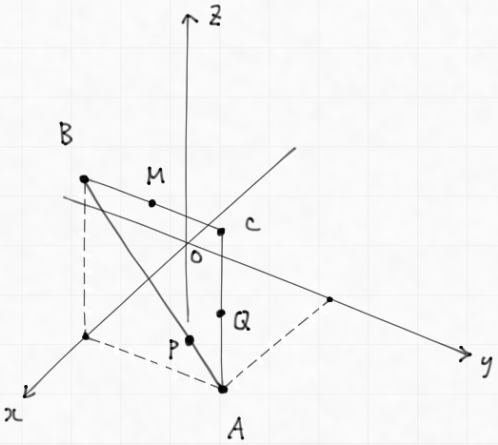
岐阜大学2021



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2$

(2) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$

$\triangle APQ = \frac{AP}{AB}\times\frac{QC}{AQ}\times\triangle ABC = \frac{1}{2}tu$

$\triangle BMP = \frac{AP}{AB}\times\frac{BM}{BC}\times\triangle ABC = \frac{1}{2}(1-t)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-t)$

$\triangle CQM = \frac{CQ}{AC}\times\frac{CM}{BC}\times\triangle ABC = \frac{1}{2}\times(1-u)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-u)$

(3) $\frac{V'}{V} = \frac{\triangle PQM}{\triangle ABC} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}tu-\frac{1}{4}(1-t)-\frac{1}{4}(1-u)}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(t+u-2tu)$

(4) $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\vec{OP} = (1-t)\vec{a}+t\vec{b} = \begin{pmatrix}1-t\\1-t\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-t\\t\end{pmatrix}$

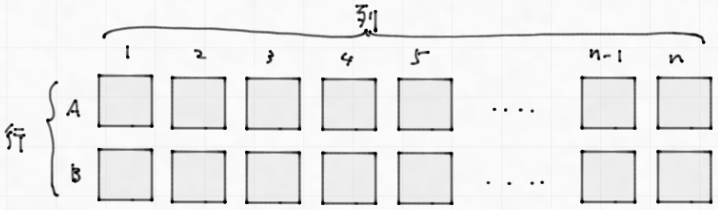
$\vec{OQ} = (1-u)\vec{a}+u\vec{c} = \begin{pmatrix}1-u\\1-u\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\u\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix}$ $\vec{PQ} = \vec{OQ}-\vec{OP} = \begin{pmatrix}0\\t\\u-t\end{pmatrix}$

$\vec{OM}\cdot\vec{PQ} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\t\\u-t\end{pmatrix} = \frac{1}{2}t+u-t = u-\frac{1}{2}t = 0$ $t=2u$

(5) $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}(-4u^2+3u) = -2u^2+\frac{3}{2}u = -2\left(u-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{32}$ $u=\frac{3}{8}$ のとき、最大値 $\frac{9}{32}$ をとる

岐阜大学2021

2



座席を 1A, 1B, 2A, 2B… のように呼ぶ

(1) $k=n$のとき、同じ列の2つの行を選ぶことはできないので(隣りあうため)、各列で1つの座席しか選べない。1Aが選ばれたとき、2Aは選べないので、2列目は2B、以下同様に3A, 4B, … と選ばれる。最初に1Bが選ばれたときも同様で 2A, 3B, 4A, … と選ばれる。

1A, 2B, 3A, 4B, …　　または　1B, 2A, 3B, 4A, …

以上の**2通り**の選び方がある。

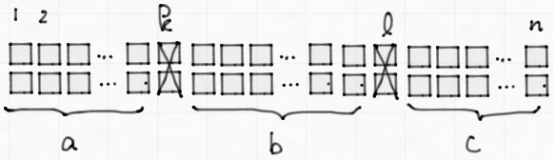
(2) 1〜n−2列までは(1)と同様の2通り。n列目は nA nBの2通り。

$2\times2=$ **4通り**

(3) 2〜n−1のいずれかの列の2つの席が選ばれないとき、(2)と同様に4通りずつの選び方がある。
1列目またはn列目の2つの席が選ばれないとき、(1)と同様に2通りずつの選び方がある。

$(n-1-2+1)\times4+2\times2=$ **$4n-4$通り**

(4) 2つの列が2席とも選ばれない。この列をk列、l列とする (k<lとする)



$a=k-1$, $b=l-k-1$, $c=n-l$ とする。　このとき、$a+b+c=n-2$

(i) $a>1$, $b>1$, $c>1$となるのは、$(n-2)-3$コのボールをa, b, cの3つに分けることを考え、

${}_3H_{n-5}={}_{n-3}C_{n-5}={}_{n-3}C_2=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$通り。

それぞれの座席の座り方が $2^3=8$通り。　　$\frac{1}{2}(n-3)(n-4)\times8=4(n-3)(n-4)$

(ii) a, b, cのうち1つが0となるのは、

どれが0なのかで3通り。残り2つにn−2コのボールを少なくとも1つ入れる　${}_2H_{n-2-2}={}_{n-3}C_1$
$=n-3$

それぞれの座席の座り方が $2^2=4$通り。　　$3\times4(n-3)$

(iii) a, b, cのうちの2つが0となるのは、${}_3C_2=3$通り。それぞれに2通りずつ選び方がある。

$3\times2=6$通り。

(i)(ii)(iii)より　$4(n-3)(n-4)+12(n-3)+6=$ **$4n^2-16n+18$**

岐阜大学2021

3 $a_1 = 4,\quad a_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{a_n}$

(1) $b_1 = 1 \cdot a_1 = \mathbf{4}$

$a_2 = 4 - \dfrac{4}{a_1} = 3 \qquad b_2 = 2 \cdot a_2 = \mathbf{6} \qquad a_3 = 4 - \dfrac{4}{a_2} = \dfrac{8}{3} \qquad b_3 = 3 \cdot a_3 = \mathbf{8}$

$a_4 = 4 - \dfrac{4}{a_3} = \dfrac{5}{2} \qquad b_4 = 4 \cdot \dfrac{5}{2} = \mathbf{10}$

(2) $a_n = \dfrac{b_n}{n}$ を漸化式に代入

$$\frac{b_{n+1}}{n+1} = 4 - \frac{4n}{b_n} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 4(n+1) - \frac{4n(n+1)}{b_n}}$$

(3) (1)より $\{b_n\}$ は初項4、公差2の等差数列と予測できる。

これを数学的帰納法によって示す。

(i) $n=1$ のとき　$b_1 = 4$ だから明らか。

(ii) $n=k$ のとき　$b_k = 4 + (k-1) \times 2 = 2k+2$ と仮定する。

このとき、$b_{k+1} = (k+1)\left(4 - \dfrac{4k}{b_k}\right) = (k+1)\left(4 - \dfrac{\cancel{4}k}{\cancel{2}k+\cancel{2}}\right)$　(∵仮定)

$= (k+1) \times \dfrac{2k+4}{k+1} = 2k+4$

よって $n=k$ のときに予測が正しいとすると $k+1$ のときも正しいことが分かる

(i)(ii)より 数学的帰納法により 全ての n について $b_n = 2n+2$ が成立する。

(4) $a_n = \dfrac{b_n}{n} = \dfrac{2n+2}{n} = \mathbf{2 + \dfrac{2}{n}}$

(5) $c_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n = \left(2 \cdot \dfrac{\cancel{2}}{1}\right)\left(2 \cdot \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\left(2 \cdot \dfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\left(2 \cdot \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right) \cdots \left(2 \cdot \dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\right)\left(2 \cdot \dfrac{n+1}{\cancel{n}}\right) = (n+1)2^n$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + (n+1) \cdot 2^n$$

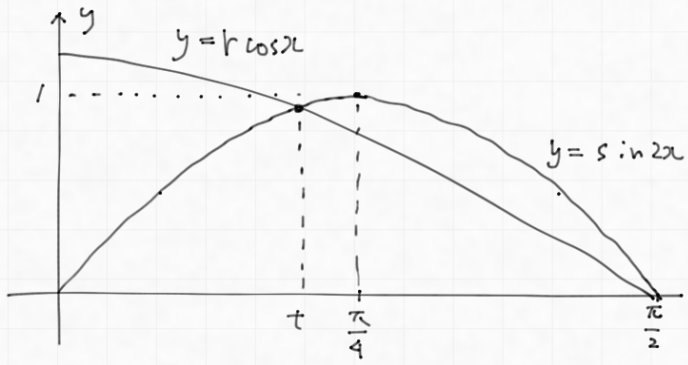
$$-)\ 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k = \qquad 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1)2^{n+1}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k = 2 \cdot 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n - (n+1)2^{n+1} = 4 + 4 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2-1} - (n+1)2^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = -2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = \mathbf{n\,2^{n+1}}$$

岐阜大学2021

4 (1) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$



(2) $f(x)=g(x)$ となるのは

$\sin 2x = r\cos x$

$2\sin x\cos x - r\cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - r) = 0$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x \neq 0$ だから 上式が成り立つのは $\sin x = \frac{r}{2}$ のとき.

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x$ は単調に増加し. $0<\sin x<1$ だから. $\sin x = \frac{r}{2}$ が唯1つの解をもつのは

$0<\frac{r}{2}<1$ のとき. ∴ **$0<r<2$** のとき唯1つの共有点をもつ.

このときの x 座標を t とすると $\sin t = \frac{r}{2}$ が成り立つので **$r = 2\sin t$**

(3) $T=\int_t^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x - r\cos x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - r\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - r + \frac{1}{2}\cos 2t + r\sin t$

$= \frac{1}{2} - r + \frac{1}{2}(1-2\sin^2 t) + r\cdot\frac{r}{2} = -r - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r^2 + 1 = \frac{1}{4}r^2 - r + 1 = \frac{1}{4}(r-2)^2$

(4) $\frac{S}{T} = 4$ より $T = \frac{S}{4}$ $\frac{1}{4}(r-2)^2 = \frac{1}{4}$ ∴ $r = 1, 3$

このうち $0<r<1$ を満たすものは **$r=1$**

このとき $\sin t = \frac{1}{2}$ だから $t = \frac{\pi}{6}$ $P\left(\frac{\pi}{6}, \sin 2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2 2x - \pi\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 4x - 1 - \cos 2x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}(-0-0) - \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

岐阜大学2021

5 (1) $f(x)=x^n e^{-x}$ $(x \geqq 0)$

$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}$

(2) $f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$ だから $f'(x)=0$ となるのは $x=0, n$

$f(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

よって $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最大値は

$x=n$ のときで $f(n)=n^n e^{-n}=\left(\frac{n}{e}\right)^n$

(3) $\dfrac{g(x)}{e^x n^{-n}}=\dfrac{e^{x-n}-\left(\frac{x}{n}\right)^n}{e^x n^{-n}}=\left(\dfrac{e}{n}\right)^{-n}-\dfrac{x^n}{e^x}=\left(\dfrac{n}{e}\right)^n-\dfrac{x^n}{e^x}=f(n)-f(x) \geqq 0$ $(\because (2))$

(4) $e^x \cdot n^{-n}>0$ だから (3) と併せ、$x \geqq 0$ において $g(x) \geqq 0$ （等号は $x=n$）

よってもとめる面積は

$$S_n=\int_n^{n+1}|g(x)|\,dx=\int_n^{n+1}g(x)\,dx=\int_n^{n+1}e^{x-n}-\left(\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$=\left[e^{x-n}-\frac{1}{n^n}\times\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_n^{n+1}=e^1-\frac{1}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}-e^0+\frac{1}{n^n}\cdot\frac{n^{n+1}}{n+1}$$

$$=e-1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{n}{n+1}=e-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

(5) $S_n>0$ だから

$$e-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0$$

$$\frac{1}{n+1}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

証明終