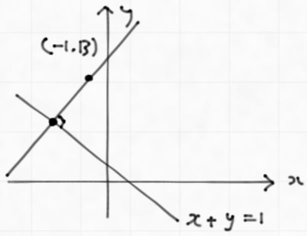
福井大学2020(医)

1 (1) $a_3 = a_2 + a_1 = -4+3 = -1$

$b_3 = \sqrt{b_2^2 + b_1^2} = \sqrt{144+25} = 13$

$c_3 = 2a_3 + 3b_3^2 = -2 + 507 = 505$　　　$c_3 = 505$　　$z_3 = -1+13i$

(2) $w = x+yi$ とおく



$(1-i)(x+yi) + (1+i)(x-yi) = 2$

$x + \cancel{yi} - \cancel{xi} + y + x - \cancel{yi} + \cancel{xi} + y = 2$

$x+y=1$

$x+y=1$ と $(-1,13)$ との距離は $\dfrac{|-1+13-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{2}}$　　最小値は $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$

$(-1,13)$ を通り $x+y=1$ と直交する直線は $y=(x+1)+13 = x+14$

これと $x+y=1$ を連立して $(x,y) = \left(-\dfrac{13}{2}, \dfrac{15}{2}\right)$　　$w = -\dfrac{13}{2} + \dfrac{15}{2}i$

(3) (i) $n=1$ のとき

$c_1 = 2\cdot 3 + 3(-5)^2 = 81 = 3^4$, $c_2 = -8 + 3\cdot 12^2 = 424 = 2^3\cdot 53$

したがって c_1 と c_2 は互いに素な整数

(ii) $n=k$ のとき.

c_k と c_{k+1} が互いに素だと仮定する.

このとき c_{k+1} と c_{k+2} が互いに素であることを示す.

$c_{k+2} = 2a_{k+2} + 3b_{k+2}^2 = 2a_{k+1} + 2a_k + 3(b_{k+1}^2 + b_k^2)$

また、$c_{k+1} = 2a_{k+1} + 3b_{k+1}^2$ だから.

$c_{k+2} - c_{k+1} = 2a_k + 3b_k^2 = c_k$ が成り立つが、c_{k+2} と c_{k+1} の最大公約数は、

$c_{k+2} - c_{k+1}$ と c_{k+1} の最大公約数に等しく. これは c_{k+1} と c_k の最大公約数のことだから.

仮定よりその値は 1

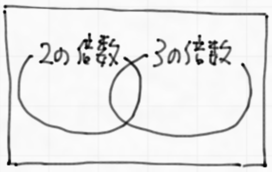
したがって仮定の下で c_{k+1} と c_{k+2} も互いに素である.

(i)(ii)より. 全ての正の整数 n に対し、c_n と c_{n+1} は互いに素な整数である.

2

(1) 4枚とも奇数となれば良い　$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

(2)



2の倍数は (1)の余事象　$1-\frac{16}{625}$

3の倍数でない確率は 2.4.5のいずれかの番号が出続けることになり　$\left(\frac{3}{5}\right)^4$

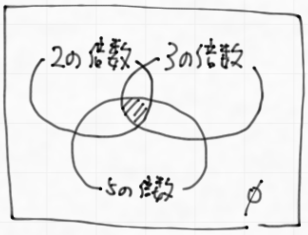
3の倍数になるのは　$1-\left(\frac{3}{5}\right)^4$

2の倍数でも3の倍数でもないのは 5のカードが出続けたときで　$\left(\frac{1}{5}\right)^4$

したがって 2の倍数または3の倍数となるのは　$1-\left(\frac{1}{5}\right)^4$

6の倍数となるのは 2の倍数かつ3の倍数のときで.

$$\left(1-\frac{16}{625}\right)+\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^4\right\}-\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^4\right) = 1-\frac{16}{625}-\frac{81}{625}+\frac{1}{625} = \frac{529}{625}$$



(3)

2の倍数. 3の倍数, 5の倍数 を A, B, C で表す.

$n(\bar{A}) = 16 \qquad n(\bar{B}) = 81 \qquad n(\bar{C}) = 4^4 = 256$

$n(A) = 625-16 = 609 \qquad n(B) = 544, \qquad n(C) = 369$

$n(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1^4 = 1, \quad n(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = 0$

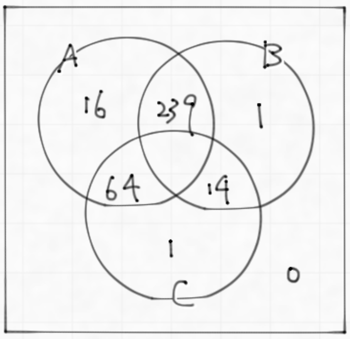
$\therefore n(C\cap\bar{A}\cap\bar{B}) = 1$

$n(\bar{A}\cap\bar{C}) = 1$ … 2. 4. 6. 5は不可　5のみ4回

$n(A\cup C) = 625 - n(\bar{A}\cap\bar{C}) = 624$

$n(A\cap C) = n(A)+n(C)-n(A\cup C) = 609+369-624$

$= 354$



$n(\bar{B}\cap\bar{C}) = 2^4 = 16 = n(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})$

$n(\bar{A}\cap B\cap C) = n(\bar{A}) - n(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) - n(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C) = 14$

$n(A\cap\bar{B}\cap C) = 81-16-1 = 64$

$n(A\cap B\cap\bar{C}) = 256-16-1 = 239$

$n(A\cap B\cap C) = 625-16-239-1-64-14-1 = 290$

$$\therefore \frac{290}{625} = \frac{58}{125}$$

3

(1) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx = \tan x - x + C$ （Cは積分定数）

(2) $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x} - 8\sin x$

$f'(x) = 0$となるのは $\dfrac{3}{\cos^2 x} = 8\sin x$ より $3 = 8\sin x\cos^2 x$

$\Leftrightarrow\ 8\sin x(1-\sin^2 x) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow\ 8\sin^3 x - 8\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\sin x - 1)(4\sin^2 x + 2\sin x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow\ \sin x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$のとき $\sin x > 0$ だから $\sin x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$

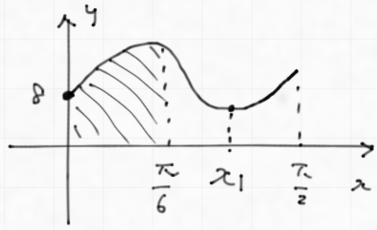
$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{13}-1}{4} = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4} < 0$ より $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$ を満たす x を x_1 とする。$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$の区間で $\sin x$ は単調に増加し、$\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$ より

$\dfrac{\pi}{6} < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$ このとき、$f(x)$の増減は下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	x_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	8	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	/

よって $a = \dfrac{\pi}{6}$ であり、$\sin a = \dfrac{1}{2}$



(3) $f(a) = 3\tan\dfrac{\pi}{6} + 8\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} + 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} > 0$

よって囲まれる図形は右図斜線部

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi f(x)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3\tan x + 8\cos x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} 9\tan^2 x + 48\sin x + 32(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \pi\left[9\tan x - 9x - 48\cos x + 32x + \frac{32}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \pi\left(3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi - 24\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi + 8\sqrt{3}\right) - \pi(0 - 0 - 48 + 0 + 0)$$

$$= -13\sqrt{3}\pi + \frac{23}{6}\pi^2 + 48\pi = \pi\left(\frac{23}{6}\pi + 48 - 13\sqrt{3}\right)$$

4

(1) 右下図 OAの長さは $\dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{n}}$

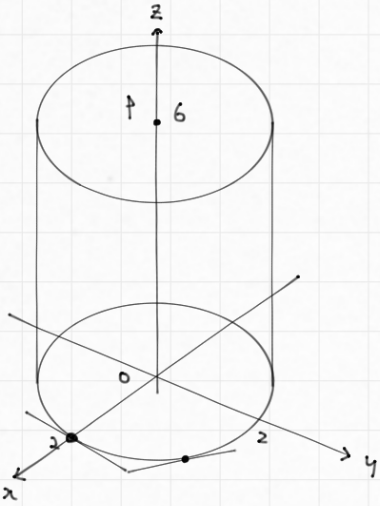
APとKの交点をB, Bからz軸に下ろした垂線の足をHとする(右下図)と

PH : PB = BH : AO が成り立つので

$$PH : 6 = 2 : \frac{2}{\cos\frac{\pi}{n}} \qquad PH = 6\cos\frac{\pi}{n}$$

よってPのz座標は $6-6\cos\frac{\pi}{n}$ で、これがもとめる交点(B)の

z座標と等しい $z = \mathbf{6-6\cos\frac{\pi}{n}}$



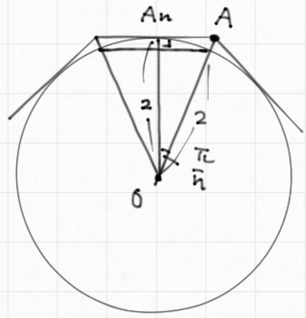
(2) $z \leqq t_n$ の範囲では L_nは全てKに含まれている

底面の正n角形は半径2の円に内接するので、その面積は

$$\frac{1}{2}\times 2^2 \times \sin\frac{2\pi}{n} \times n = 2n\sin\frac{2\pi}{n}$$

高さはPHになるので、体積は

$$2n\sin\frac{2\pi}{n} \times 6\cos\frac{\pi}{n} \times \frac{1}{3} = \mathbf{4n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}$$



(3) $W_n = 4n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty}\left(4n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \times 4\cancel{n} \times \frac{2\pi}{\cancel{n}}\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= 1 \times 8\pi \times 1 = \mathbf{8\pi}$$