岐阜大学2021

1 (1) wが実数のとき $w=\overline{w}$ が成り立つ。ここに $w=z+\frac{1}{z}$ を代入して整理する

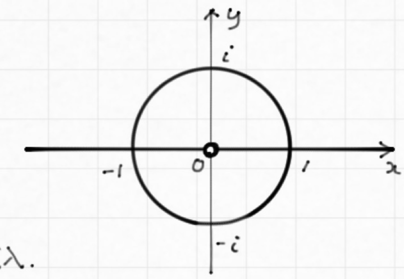
$$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}} \iff z-\overline{z}+\frac{1}{z\overline{z}}(\overline{z}-z)=0 \iff (z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$$

よって

$z=\overline{z}$ または $|z|=1$ であり、これは zが実数 または

zの大きさが1であることを示しており、右図の太線部

の図形を描く(原点除く)

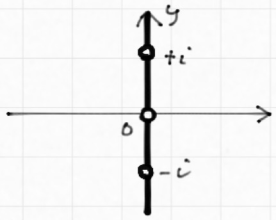


(2) wが純虚数のとき $w=-\overline{w}$ かつ $w\neq 0$ ここに $w=z+\frac{1}{z}$ を代入。

$$z+\frac{1}{z}=-\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}} \iff (z+\overline{z})(|z|+1)=0 \quad かつ \quad z+\frac{1}{z}\neq 0 \iff z\neq \pm i$$

$|z|+1\neq 0$だから $z=-\overline{z}$ で、これは zが純虚数となることを示している

以上より zの描く図形は右のようになる



(3) $|z|=r$ だから zは $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表せる ($0\leqq\theta<2\pi$とする)

このとき $w=z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=(r+\frac{1}{r})\cos\theta+(r-\frac{1}{r})\sin\theta\cdot i$

$w=x+yi$ とすると (x, yは実数)

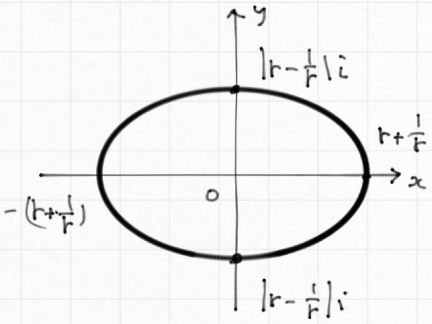
$$x=(r+\frac{1}{r})\cos\theta \quad , \quad y=(r-\frac{1}{r})\sin\theta$$

$r\neq\pm1$だから

$$\cos\theta=\frac{x}{r+\frac{1}{r}} \quad , \quad \sin\theta=\frac{y}{r-\frac{1}{r}}$$

平方の和をとると $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1=\dfrac{x^2}{(r+\frac{1}{r})^2}+\dfrac{y^2}{(r-\frac{1}{r})^2}$

これは原点を中心とした楕円で wの描く曲線は右のようになる。



(4) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく。

$$w=(r+\frac{1}{r})\cos\theta+(r-\frac{1}{r})\sin\theta\cdot i$$

$|w|=1$に代入して $(r+\frac{1}{r})^2\cos^2\theta+(r-\frac{1}{r})^2\sin^2\theta=1$

$$\iff r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=1 \iff 2\cos2\theta=1-r^2-\frac{1}{r^2} \iff \cos2\theta=\frac{1}{2}\left(1-r^2-\frac{1}{r^2}\right)$$

$r^2=X$ とおくと $X>0$で、 $\cos2\theta=\frac{1}{2}\left(1-X-\frac{1}{X}\right)$ ($=f(X)$と表す。)

$$f'(X)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{X^2}\right)=\frac{1-X^2}{2X^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$

$f'(X)=0$ となるのは $X=1$ のときで、$f(X)$の増減は

右のとおり。 $\displaystyle\lim_{X\to+0}f(X)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{X\to\infty}f(X)=-\infty$

よって $\cos2\theta=f(X)\leqq-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}\pi\leqq2\theta\leqq\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi\leqq2\theta\leqq\frac{10}{3}\pi$

$$\therefore \ \frac{1}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi \ , \ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$$

岐阜大学2021

2 (1) $y=0$ は接線でないことは明らかだから もとめる接線は $y=mx$ と表すことができる.

$y=x^2+\frac{1}{2}$ と重解をもつので

$$x^2+\frac{1}{2}=mx \iff x^2-mx-\frac{1}{2}=0$$

は重解をもつ. 判別式を D として.

$$D=m^2-4\cdot\frac{1}{2}=0 \qquad m=\pm\sqrt{2}$$ よって接線は $\boldsymbol{y=\pm\sqrt{2}x}$

(2) $f'(\theta)=\log 2\cdot 2^{\sin\theta}\cdot\cos\theta$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2θ
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

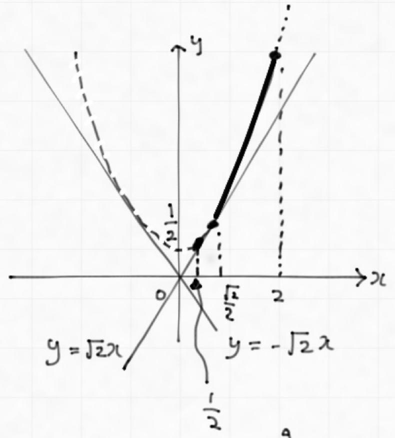
$0\leqq\theta<2\pi$ で $f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=0$ のときの $\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$f(\theta)$ の増減は右のようになる.

$$f(0)=2^0=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^1=2,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2^{-1}=\frac{1}{2},\ f(2\pi)=2^0=1$$

以上より $f(\theta)$ の最大値 $M=\boldsymbol{2}$ そのときの θ は $\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

最小値 $m=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ そのときの θ は $\theta=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$



(3) (2)より $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$

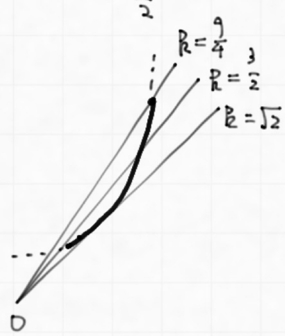
$x=\frac{1}{2}$ のとき $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$y=kx$ が $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ を通るのは $k=\frac{3}{2}$ のとき.

$x=2$ のとき $y=2^2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$y=kx$ が $(x,y)=\left(2,\frac{9}{2}\right)$ を通るのは $k=\frac{9}{4}$ のとき.

(1)より $k=\sqrt{2}$ のとき. $y=kx$ は $y=x^2+\frac{1}{2}$ と接する.

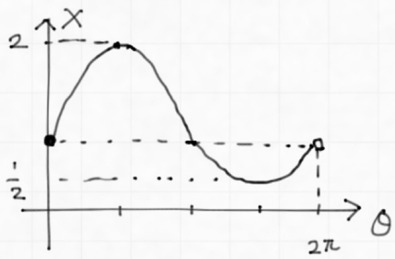


以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<\sqrt{2},\ k>\frac{9}{4}\ \text{のとき}} & \textbf{実数解は存在しない} \\ \boldsymbol{k=\sqrt{2},\ \frac{3}{2}<k\leqq\frac{9}{4}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{〃\quad 1つ} \\ \boldsymbol{\sqrt{2}<k\leqq\frac{3}{2}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{〃\quad 2つ} \end{cases}$$

(4) $2^{\sin\theta}=X$ とすると

$$X^2+\frac{1}{2}=kX,\quad \frac{1}{2}\leqq X\leqq 2$$



右グラフより. $\frac{1}{2}<X<2$ を満たす X 1つに対して θ は2つ存在し.

$X=\frac{1}{2}, 2$ 〃 θ は1つ存在する.

(3) および以上の考察より

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<\sqrt{2},\ k>\frac{9}{4}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{\theta\ \text{は存在しない}} \\ \boldsymbol{k=\frac{9}{4}\ \text{のとき.}} & \boldsymbol{\theta\ \text{は}1つ} \\ \boldsymbol{k=\sqrt{2},\ \frac{3}{2}<k<\frac{9}{4}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{\theta\ \text{は}2つ} \\ \boldsymbol{k=\frac{3}{2}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{\theta\ \text{は}3つ} \\ \boldsymbol{\sqrt{2}<\theta<\frac{3}{2}\ \text{のとき}} & \boldsymbol{\theta\ \text{は}4つ} \end{cases}$$

存在する

岐阜大学2021

3

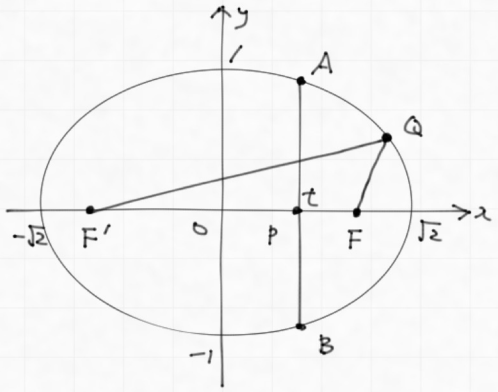
(1) F, F′からの距離の和が2aだから長軸半径がaのだ円で、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(b>0,\ a>b)$

と表せる　F(1, 0) だから、$a^2-b^2=1^2$　よって $b^2=a^2-1$

以上よりだ円Eの式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$.　短軸の長さは $b=\sqrt{a^2-1}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$

(3) $a=\sqrt{2}$ を代入　$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$



点Pのx座標をtとすると

$AP=|y|=\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}$

三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\times AB\times h=\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}\,h$ となるので

$$V=\int_{-1}^{1}h\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}\,dt=2h\int_0^1\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=\cos\theta$ とおく　$\left(\dfrac{dt}{d\theta}=-\sqrt{2}\sin\theta,\quad \begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{4}\end{array}\right)$

$$V=2h\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sqrt{2})\sin\theta\,d\theta=2\sqrt{2}h\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\sqrt{2}h\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1-\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}h\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}h\left(\frac{\pi}{2}-0-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi h+\frac{\sqrt{2}}{2}h$$

(4) $Q(a\cos\theta,\ \sqrt{a^2-1}\sin\theta)$ とおく.

$FQ^2=(a\cos\theta-1)^2+(a^2-1)\sin^2\theta=a^2-2a\cos\theta+\cos^2\theta=(a-\cos\theta)^2$

$FQ=|a-\cos\theta|=a-\cos\theta$

$F'Q=2a-FQ=a+\cos\theta$

$\triangle FQF'$ について余弦定理より　$FF'^2=FQ^2+F'Q^2-2FQ\cdot F'Q\cdot\cos30^\circ$

$$4=a^2\cancel{-2a\cos\theta}+\cos^2\theta+a^2\cancel{+2a\cos\theta}+\cos^2\theta-\sqrt{3}(a^2-\cos^2\theta)$$

$$(2+\sqrt{3})\cos^2\theta=4-2a^2+\sqrt{3}a^2$$

$$\cos^2\theta=\frac{(\sqrt{3}-2)a^2+4}{2+\sqrt{3}}=4(2-\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})^2a^2$$

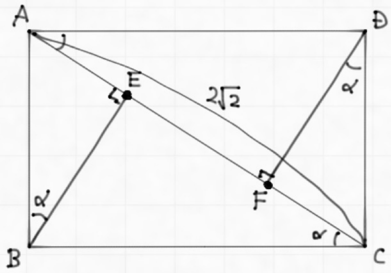
$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-8+4\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})^2a^2}$$

$$=\pm\sqrt{(2-\sqrt{3})^2a^2-(2-\sqrt{3})^2}=\pm(2-\sqrt{3})\sqrt{a^2-1}$$

よってQのy座標は $\sqrt{a^2-1}\,\sin\theta=\pm(2-\sqrt{3})(a^2-1)$

岐阜大学2021

4



(1) $AB = 2\sqrt{2}\sin\alpha$, $BC = 2\sqrt{2}\cos\alpha$

$\triangle ABC \sim \triangle AEB$ (∵ 直角三角形で$\angle BAC$共通)より

$\angle ABE = \alpha$

よって $AE = AB\sin\alpha =$ $\mathbf{2\sqrt{2}\sin^2\alpha}$

同様に $CF = 2\sqrt{2}\sin^2\alpha$

よって $EF = 2\sqrt{2} - AE - CE =$ $\mathbf{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\sin^2\alpha}$

(2) $DE^2 = DF^2 + EF^2 = (DC\cos\alpha)^2 + (2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\sin^2\alpha)^2 = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8 - 32\sin^2\alpha + 32\sin^4\alpha$

$\theta = 90^\circ$ のとき $BE \perp DF$ であり、また、$BE \perp AC$ でもあるので 平面$ACD \perp BE$.

したがって $\angle BED = 90^\circ$

$\triangle BED$について 三平方の定理より

$$BD^2 = BE^2 + DE^2$$

$$5 = (AB\cos\alpha)^2 + 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8 - 32\sin^2\alpha + 32\sin^4\alpha$$

$$5 = 16\sin^4\alpha - 16\sin^2\alpha + 8$$

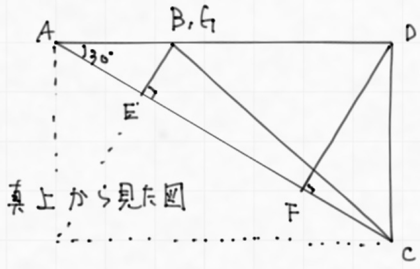
$$16\sin^4\alpha - 16\sin^2\alpha + 3 = 0$$

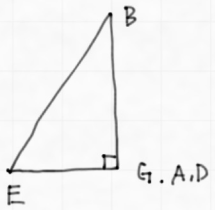
$$(2\sin\alpha + 1)(2\sin\alpha - 1)(2\sin\alpha + \sqrt{3})(2\sin\alpha - \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$AB \leqq BC$ より $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ を満たすのは $\alpha = 30^\circ$ $(\sin\theta = \frac{1}{2})$ のみ. $\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$

(3)





真上から見たとき、G, Bは重なるが、GがAD上にあるとき θが最小となる.

このとき $GE = AE\tan 30^\circ = 2\sqrt{2}\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{2}\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$$BE = 2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

だから

$$BG^2 = BE^2 - GE^2 = \frac{6}{4} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \qquad BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\angle BEG = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{3}$$

θが最も大きくなるのは GがAC上に近付くときなので、

$$\mathbf{0 < \cos\theta < \frac{1}{3}}$$

岐阜大学2021

5 $f(x) = x^{-2} + x^{-3} = \dfrac{x+1}{x^3}$

(1) $f'(x) = -2\cdot x^{-3} - 3x^{-4} = \dfrac{-2x-3}{x^4}$

$f''(x) = 6x^{-4} + 12x^{-5} = \dfrac{6(x+2)}{x^5}$

(2) $f(x)$ の分母 $\neq 0$ だから $x \neq 0$

$f'(x)=0$ を解くと $x = -\dfrac{3}{2}$, $f''(x)=0$ を解くと $x=-2$.

以上より $f(x)$ の増減および凹凸は右のようになる

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	/	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/	$+$
$f(x)$	↗		↗		↘	/	↘

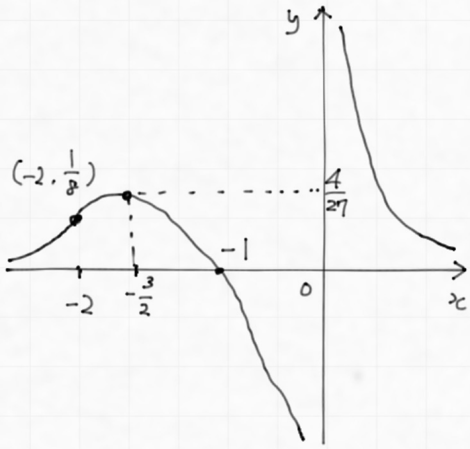
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{x+1}{x^3} = -\infty \qquad \lim_{x\to+0} \frac{x+1}{x^3} = +\infty$

$f(-2) = \dfrac{1}{8}$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{27}$

変曲点は $\left(-2, \dfrac{1}{8}\right)$ 漸近線は $x=0$

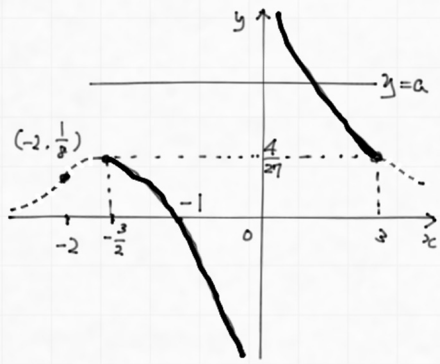
グラフの概形は右のとおり.



(3) $x=0$ は $ax^3 = x+1$ を満たさないので $x \neq 0$.

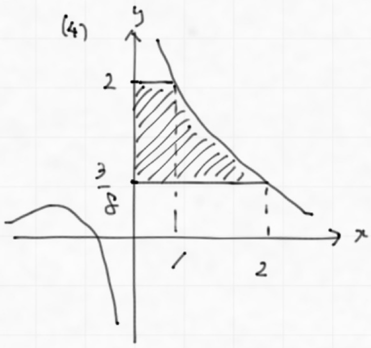
このとき $ax^3 = x+1 \iff a = \dfrac{x+1}{x^3}$

と変形できるので. $ax^3 = x+1$ の $\left[-\dfrac{3}{2}, 3\right]$ における実数解の個数は. $y=f(x)\left(-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 3\right)$ と $y=a$ のグラフの交点の数に等しく. $f(3) = \dfrac{4}{27}$ だから. 右図より



$a = \dfrac{4}{27}$ のとき 2個 　 $a \neq \dfrac{4}{27}$ のとき 1個

(4)



$2 = f(x) \iff 2x^3 - x - 1 = 0 \iff x = 1$

$\dfrac{3}{8} = f(x) \iff 3x^3 - 8x - 8 = 0 \iff x = 2$

$S = 1\times 2 + \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx - \frac{3}{8}\times 2$

$= \dfrac{5}{4} + \displaystyle\int_1^2 x^{-2} + x^{-3}\,dx$

$= \dfrac{5}{4} + \left[-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}\right]_1^2 = \dfrac{5}{4} + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right) - \left(-1 - \dfrac{1}{2}\right)$

$= \mathbf{\dfrac{17}{8}}$