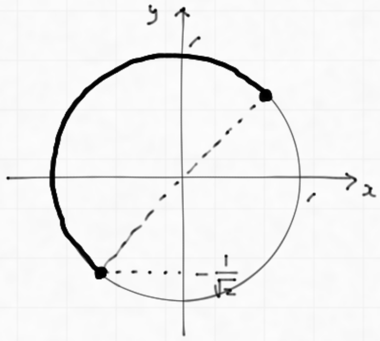
2020 関西医大(後)



1 (1) $\cos\theta+\sin\theta=t$ とおく

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であり $0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$

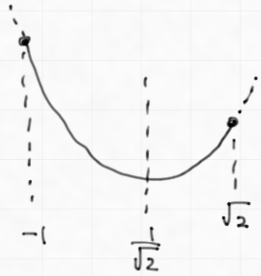
だから 右図より $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって $-1\leqq t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$ …①

また. $t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\cos\theta\sin\theta$ より $\cos\theta\sin\theta=\frac{t^2-1}{2}$ なので

$$y=4\sqrt{2}\times\frac{t^2-1}{2}-4t=2\sqrt{2}t^2-4t-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\sqrt{2}$$

と変形できるので yは



$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\mathbf{-3\sqrt{2}}$ (エ) をとる.

(このとき $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ だから $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ $\theta=\mathbf{\frac{7}{12}\pi}$ (ウ))

$t=-1$ のとき最大値 $2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}=\mathbf{4}$ (イ) をとる

(このとき $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta=\mathbf{\pi}$ (ア))

(2) $3x^2+xy-2y^2-x+4y-2=3x^2+(y-1)x-2(y-1)^2$

$=(3x-2(y-1))(x+y-1)=\mathbf{(3x-2y+2)(x+y-1)}$

$3x^2+xy-2y^2-x+4y-4=0$ は $(3x-2y+2)(x+y-1)=2$ と変形できるので

$(3x-2y+2,\ x+y+1)=(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)$

これらを解き. x, y がともに整数となるものをもとめると $(x,y)=\mathbf{(-1,0),(1,2)}$

(3) $f(x)=(x^2+3x+1)e^{-x}$

$f'(x)=(2x+3)e^{-x}+(x^2+3x+1)(-e^{-x})=\mathbf{(-x^2-x+2)e^{-x}}$

$ke^x=x^2+3x+1$ について $e^x\neq 0$ だから $k=(x^2+3x+1)e^{-x}$ と同値.

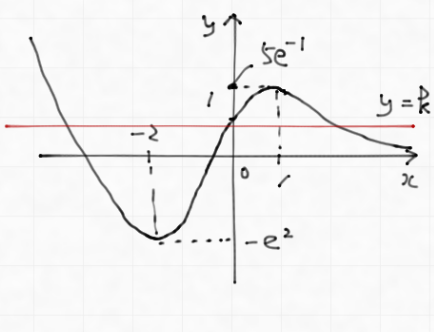
つまり $k=f(x)$ が3つの実数解を持てばよい.

$y=f(x)$ のグラフは. $f'(x)=0$ となるのが $-x^2-x+2=0$ すなわち $(x-1)(x+2)=0$ のときなので $x=1,-2$ のときで $f(x)$ の増減およびグラフは下のようになる

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$f(-2)=-e^2$, $f(1)=5e^{-1}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$



$y=k$ と $y=f(x)$ が異なる3点で交われば条件を満たすので kの範囲は

$$\mathbf{0<k<\frac{5}{e}}$$

3項間漸化式

数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=10a_{n+1}+51a_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$

以下の設問に答えよ。なお(2), (3)の設問は解答を求める過程も記述すること。

(1) $a_3,\ a_4,\ a_5$を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) a_nを10で割った余りをb_nとする。mを正の整数として、$\sum_{k=1}^{2m} b_k$を求めよ。

2020 関西医大(後)

(1) $a_3=10a_2+51a_1=\mathbf{10}$

$a_4=10a_3+51a_2=100+51=\mathbf{151}$ $\qquad\alpha^2=10\alpha+51$

$a_5=10a_4+51a_3=1510+510=\mathbf{2020}$

(2) $a_{n+2}=10a_{n+1}+51a_n$ を $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形することを考える。

両者を比較して $\alpha+\beta=10,\ \alpha\beta=-51$

α, β を解にもつ2次方程式の1つは $t^2-10t-51=0$ で $t=5\pm\sqrt{25+51}=5\pm2\sqrt{19}$

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})=\beta^2(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})=\cdots=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)=\beta^{n-1}$$

より

$$a_{n+1}-(5+2\sqrt{19})a_n=(5-2\sqrt{19})^{n-1}\quad\cdots①$$

$$a_{n+1}-(5-2\sqrt{19})a_n=(5+2\sqrt{19})^{n-1}\quad\cdots②$$

①−②　$-4\sqrt{19}\,a_n=(5-2\sqrt{19})^{n-1}-(5+2\sqrt{19})^{n-1}$

$$\therefore a_n=\frac{-(5-2\sqrt{19})^{n-1}+(5+2\sqrt{19})^{n-1}}{4\sqrt{19}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{19}\{(5+2\sqrt{19})^{n-1}-(5-2\sqrt{19})^{n-1}\}}{76}}$$

(3) $a_{n+2}=10a_{n+1}+51a_n$ の両辺を10で割った余りは等しいので

$b_{n+2}\equiv b_n \pmod{10}$

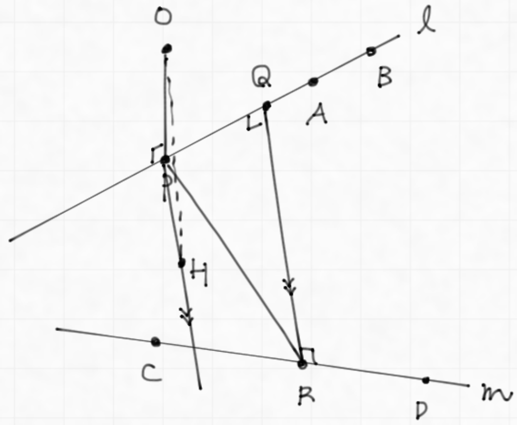
が成り立っている。したがって $b_{2n}=b_{2n-2}=\cdots=b_2=1$ であり $b_{2n-1}=b_{2n-3}=\cdots=b_1=0$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}b_k=\sum_{k=1}^{m}(b_{2k}+b_{2k-1})=\sum_{k=1}^{m}(1+0)=\mathbf{m}$

2020 関西医大

[1]

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$



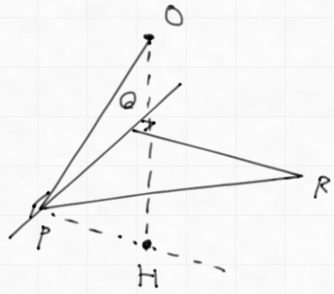
$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$　（sは任意の実数）

$m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\10\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$　（tは任意の実数）

(1) Pはl上にあるので $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}+s_p\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ とおくことができる.

$OP\perp l$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0 \iff 2(5+2s_p)+2(2+2s_p)+(-5+s_p)=0 \iff s_p=-1$

よって　$P(3,0,-6)$



Q, Rを　$Q:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}+s_q\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}-5\\10\\-1\end{pmatrix}+t_r\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ とおくと

$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-10+6t_r-2s_q\\8-2s_q\\4-3t_r-s_q\end{pmatrix}$ と表せる. $\overrightarrow{QR}\perp l$ および $\overrightarrow{QR}\perp m$ より.

$\begin{pmatrix}-10+6t_r-2s_q\\8-2s_q\\4-3t_r-s_q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0 \iff t_r-s_q=0$ …①

$\begin{pmatrix}-10+6t_r-2s_q\\8-2s_q\\4-3t_r-s_q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}=0 \iff -72+45t_r-9s_q=0 \iff 5t_r-s_q-8=0$ …②

①② より　$t_r=s_q=2$.

よって　$Q(9,6,-3)$, $R(7,10,-7)$　$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$

Hは Oから PQRに下ろした垂線の足なので

$OH\perp QR$　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+u\overrightarrow{QR}$ とおける

$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{QR}$ より　$\overrightarrow{OH}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}3-2u\\4u\\-6-4u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}=0 \iff 36u+18=0 \iff u=-\frac{1}{2}$

よって　$H(4,-2,-4)$

(2) $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{6^2+6^2+3^2}=9$, $|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{4+16+16}=6$

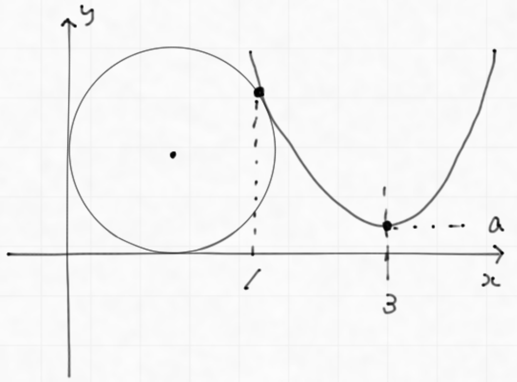
$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{16+4+16}=6$

(3) $\triangle PQR=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{RQ}|=\frac{1}{2}\times9\times6=27$

$OPQR=\triangle PQR\times|\overrightarrow{OH}|\times\frac{1}{3}=27\times6\times\frac{1}{3}=54$

2020 関西医大(後)

IV



C上の点で $x=1$ のとき $y=\frac{4}{3}+a$

円Dはx軸およびy軸と接し、$x=1$でCと接しているので

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ …①

または $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$ …②

①のとき ①は$(1, \frac{4}{3}+a)$を通るので $(1-r)^2+(\frac{4}{3}+a-r)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2-\frac{14}{3}r+a^2+\frac{8}{3}a-2ar+\frac{25}{9}=0$ …③

$(1, \frac{4}{3}+a)$におけるCの法線は $y'=\frac{2}{3}(x-3)$ だから

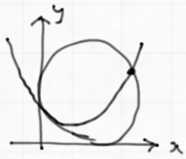
$y=\frac{3}{4}(x-1)+\frac{4}{3}+a$

これが(r, r)を通るので $r=\frac{3}{4}r+\frac{7}{12}+a \Leftrightarrow r=4a+\frac{7}{3}$ …④

③に④を代入 $16a^2+\cancel{\frac{56}{3}a}+\frac{49}{9}-\cancel{\frac{56}{3}a}-\frac{98}{9}+a^2+\frac{8}{3}a-8a^2-\frac{14}{3}a+\frac{25}{9}=0$

$\Leftrightarrow 9a^2-2a-\frac{24}{9}=0 \Leftrightarrow 81a^2-18a-24=0 \Leftrightarrow 27a^2-6a-8=0$

$\Leftrightarrow (9a+4)(3a-2)=0 \Leftrightarrow a=-\frac{4}{9}, \frac{2}{3}$

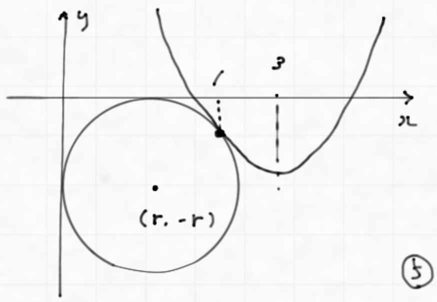


$a=\frac{2}{3}$のとき $r=5$，このとき円の中心はCの軸をこえており

C, Dは右図のようになっているので共有点が1つという条件を満たさない。

$a=-\frac{4}{9}$のとき，$r=\frac{5}{9}$ $(a, r)=(-\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$

②のとき。



②は$(1, \frac{4}{3}+a)$を通る

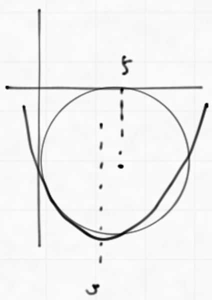
$(1-r)^2+(\frac{4}{3}+a+r)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2+\frac{2}{3}r+a^2+\frac{8}{3}a+2ar+\frac{25}{9}=0$ …⑤

Cの法線上に円の中心$(r, -r)$がある。

$-r=\frac{3}{4}(r-1)+\frac{4}{3}+a \Leftrightarrow r=-\frac{4}{7}a-\frac{1}{3}$ …⑥

⑤に⑥を代入

$\frac{16}{49}a^2+\cancel{\frac{8}{21}a}+\frac{1}{9}-\cancel{\frac{8}{21}a}-\frac{2}{9}+a^2+\frac{8}{3}a-\frac{8}{7}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{25}{9}=0$



$\frac{9}{49}a^2+2a+\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow (\frac{9}{7}a+2)(\frac{1}{7}a+\frac{4}{3})=0$ $a=-\frac{14}{9}, -\frac{28}{3}$

$\therefore (a, r)=(-\frac{14}{9}, \frac{5}{9}), (-\frac{28}{3}, 5)$

$(-\frac{28}{3}, 5)$のとき、左のようになっており、交点が1つとはなっていない。

以上より。 $(a, r)=\boldsymbol{(-\frac{4}{9}, \frac{5}{9}), (-\frac{14}{9}, \frac{5}{9})}$