

(1) x が μg だとすると

$$x \times 80 \times 5 \times 60 \text{ (}\mu\text{g)} = 24000 x \times 10^{-3} \text{ (mg)} = 7.2 \text{ より } x = 0.3 = 3.0 \times 10^{-1} \text{ (}\mu\text{g)}$$

(2) 溶量を $V \text{ (mL)}$ とすると

$$7.2 \text{ (mg)} = 3 \frac{\text{g}}{\text{mL}} \times 10^3 \times \frac{V}{10^3} \quad V = \frac{7.2}{3} = 2.4 \text{ (mL)}$$

(3) 5時間では $5 \times 60 \times 60 \div 9 = 2000$ 滴が滴下される

$$100 \text{ mL} \div 2000 \text{ 滴} = 0.05 \text{ mL} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ mL/滴}$$

$$1 \text{ mL 投与するには } 1 \div (5 \times 10^{-2}) = 20 \text{ 滴が必要} \quad 2.0 \times 10^1 \text{ 滴}$$

2 (1) ヒート&プロ-というゲームで。

(iii) より含まれている数は 1, 5, 6, 9 の4つ。

(i) について ~~6~~ ~~5~~ 6と5のどちらかには位置も正しい。...①

(ii) について 1 ~~5~~ ~~6~~ 1と5のどちらかには位置も正しい。...②

①について 4番目が5だとする (5の位置が正しいとする)

このとき、6は2番目以外 (1または3番目)

②より5は誤った位置で1が正しい位置

1 * * 5
↑
6は不可

だから 1 9 6 5 これは (iii) を満たさる。 (4Hとるため)

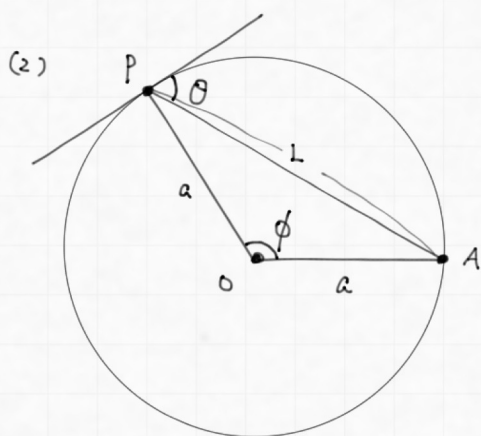
①について 2番目が6だとする (6の位置が正しいとする)

このとき5は4番目以外。

このとき (iii) は 1 9 6 5
 H H H

2, 3番目は位置は正しくなく、また、5も (i) で6が正しいと考えているので、位置は正しくなく、1番目の1が正しい。

よって 甲の用意した数字列は 1 6 5 9



$$L = 2a \sin \frac{\phi}{2}$$

接弦定理および中心角の定理より $\theta = \frac{\phi}{2}$

$$f = L^3 \cos \theta = 8a^3 \sin^3 \theta \cos \theta$$

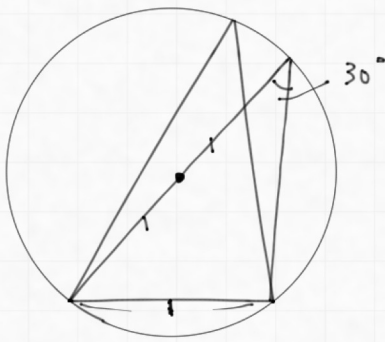
$$\frac{df}{d\theta} = a^3 \times 24 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 8a^3 \times \sin^3 \theta (-\sin \theta)$$

$$= 8a^3 \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 8a^3 \sin^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 1)$$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、極大かつ最大 ($\theta = \frac{\pi}{3}$)

$$\cos \phi = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

(3)



1つの辺が中心を通るとき、3辺の長さが1, 2, $\sqrt{3}$ の直角三角形だから、長さ1の辺の円周角 30° であることが分かる
図形的にこれが最小なのは明らか。

 30°

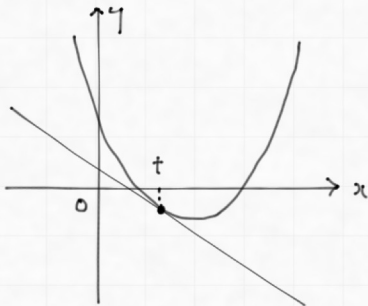
$$(4) \quad 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 + (y-2)^2 + 4 - 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

これは中心が $(-1, 2)$ の楕円で、楕円の対称性を考えよと、直線は楕円の中心を通ることになる。よって、求める直線は $y = -2x$

(5)



x 座標が t のときの接線は $y' = 2ax + b$ だから、

$$y = (2at + b)(x - t) + at^2 + bt + c$$

$$= (2at + b)x - at^2 + c$$

この接線と x, y 軸との交点は $x = 0$ のとき $y = -at^2 + c$

$$y = 0 \text{ のとき, } 2at + b \neq 0 \text{ のとき } x = \frac{at^2 - c}{2at + b}$$

$2at + b = 0$ のとき、 x 軸と交わらない。

よって三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left| -at^2 + c \right| \left| \frac{at^2 - c}{2at + b} \right| = \frac{(at^2 - c)^2}{2|2at + b|}$$

$t = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$ のとき最小(但し 0 とは)。

このとき接線は $y = (\pm 2\sqrt{ac} + b)x$

$$(6) \quad \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int x \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \times x dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

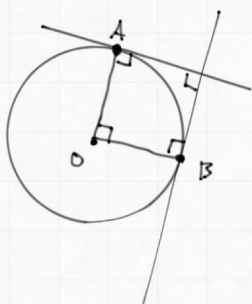
$$\int 2\sqrt{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2x\sqrt{x^2 + 1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(7) \lambda - 1 = 6 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) = 6 \frac{\sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\sqrt{\lambda} = t > 0 \quad (t^2 - 1)t = 6t - 6 \Leftrightarrow t^3 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+3)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad \lambda = 4 \quad (\because t \neq 1, t > 0)$$

(8)



交点と円の中心 O との距離は常に $\sqrt{2}$ だから、

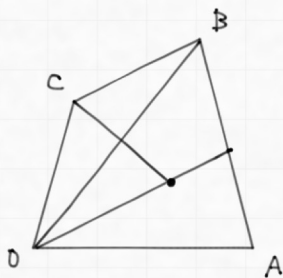
$$\text{交点の軌跡は } x^2 + y^2 = 2$$

(9) 3つの頂点の重心は P^3

この3つが異なる点のは P^3

$$\therefore \frac{P^3}{P^3} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 84} = \frac{21}{32}$$

(10)



$$m:n = 1:3 \text{ とする}$$

$$\triangle OAB \text{ の重心 } OG = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3}$$

$$GC \text{ を } 1:3 \text{ に内分する点 } \frac{3}{4} \times \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} + \frac{1}{4} \vec{OC} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4}$$

となる。 $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ についても同様

$$\triangle ABC \text{ の重心を } G \text{ としたとき } \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$GO \text{ を } 1:3 \text{ に内分する点 } \frac{3}{4} \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \text{ となる。}$$

これも同じ点となる。

$$\therefore m:n = 1:3$$

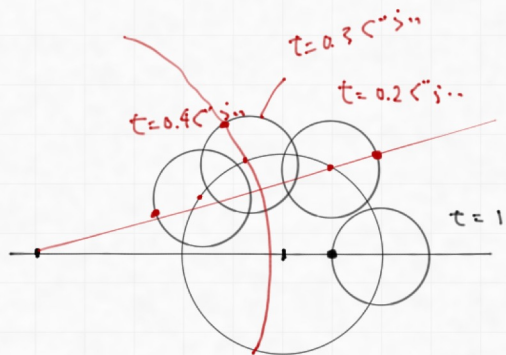
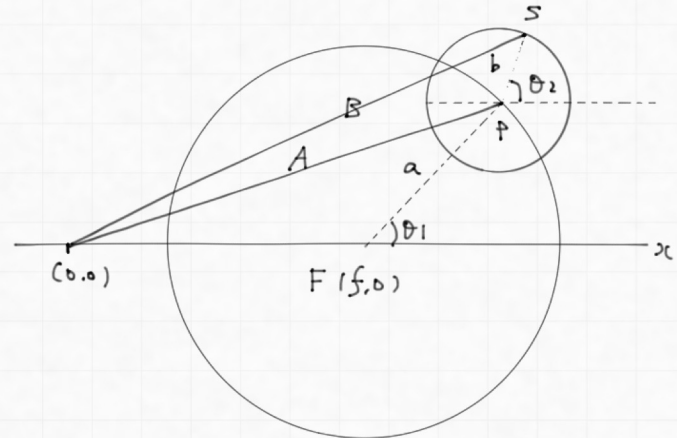
3

$$(1) (x_1, y_1) = \vec{OF} + \vec{FP} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + a \cos \theta_1 \\ a \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{OF} + \vec{FP} + \vec{PS} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 \\ a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

(3) $\theta_1 = 2\pi$ とおいたときに1周するので $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

(4) $t=0$ で $A=7, B=6$ とおいておく。 $t=0$ のとき $\theta_1=0$ だから $\theta_2 = \phi = \pi$
 $t=0$ から B は1度 A よりも大きく C_1 の外側にいて、その後原点より近づいていく



左図を見て、 $t=1$ までに S は2周することが分かる

$t=1$ のとき $\theta_1 = 2\pi, \theta_2 = \phi + \omega_2 = \phi + 2\pi$

$\omega_2 = 5\pi, \phi = \pi$

(5) $\phi = \pi, \omega_2 = 1 \cdot \omega_1$

(月の運動と同じ。同じ周期で回転可中はよい)

(6) $\phi = 0, \omega_2 = 1 \cdot \omega_1$

(7) $\frac{1}{2} T_p$ 秒で C_2 が1周することが必要で、

また、この場合、初期位相が π であるといけない

$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2} \times R$ から $\phi = \pi$

$\omega_2 = 2\omega_1 R, \phi = \pi$

(8) $\phi = \pi, P$ が2周したとき $2R-1$ 周していいからよい

$\frac{2\pi}{\omega_1} \times 2 = \frac{2\pi}{\omega_2} (2R-1)$

$\omega_2 = \frac{(2R-1)\omega_1}{2}, \phi = \pi$

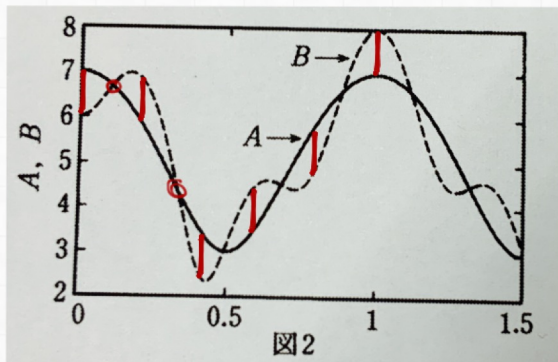
(9) P と S は同様に、常に F を向いている人から見て S は $\theta_2 - \theta_1$ だけ回転するおりに動いた

$\theta_2 - \theta_1 = (2\omega_1 - \omega_1)t + \phi = (2-1)\omega_1 t + \phi$ $0 \leq \omega_1 t \leq 2\pi$ のあいだに $2-1$ 回

F と P の間を S が通っていく。

(10) (9) と同様 $\theta_2 - \theta_1 = -(2+1)\omega_1 t + \phi$

$2+1$ 回



A と B の距離差が1になるとき、 O, P, S の3点が一直線上に並んでいる

4

(1) $a_{n+1} = p a_n + q^n$ の漸化式を p^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{p^n} = \frac{a_1}{p^1} + \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{q}{p(q-p)} (1 + q - p) + \frac{q}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{p - q} \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = \frac{q p^{n-1}}{p - q} \left(\cancel{1 - q + p} + \cancel{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}} \right) = q p^{n-1} - \frac{q^n}{p - q} \quad (n \geq 2)$$

上式で $n=1$ としたときも成り立っている。 $\therefore a_n = q p^{n-1} - \frac{q^n}{p - q} \quad (n \geq 1)$

$$(2) \frac{a_n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \frac{1}{p - q} \geq 1 \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \geq 1 + \frac{1}{p - q} = \frac{p - q + 1}{p - q} \dots \textcircled{1}$$

(i) $p > q$ のとき、 $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$ は n が大きくなるにつれて増加する。したがって $n=1$ で $\textcircled{1}$ が成り立つのは、全ての自然数 n について $\textcircled{1}$ が成り立つ。

$$1 \geq \frac{p - q + 1}{p - q} \Leftrightarrow p - q \geq p - q + 1 \Leftrightarrow 0 \geq 1 \quad \text{これは成り立たない}$$

(ii) $p < q$ のとき $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ だから、 $\frac{p - q + 1}{p - q} \leq 0$ 成立。 $\textcircled{1}$ が全ての n について成り立つ。

$$p - q + 1 \geq 0 \quad \therefore q - 1 \leq p < q \quad \text{これを満たすのは、} p, q \text{ が自然数であること}$$

$$\text{よって } p = q - 1 \text{ に限られる} \quad \therefore p = q - 1$$

(3) $p = q - 1$ かつ $n=1$ のとき。

$$\frac{a_1}{q^1} = \frac{1 + q - p}{q - p} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

(4) $q = 10$ だから (2) を満たすのは $p = 9$

$$a_n = 10 \cdot 9^{n-1} + 10^n$$

$$n=3 \text{ のとき、} a_3 = 10 \cdot 9^2 + 10^3 = 1810 < 10^4$$

$$n=4 \text{ のとき、} a_4 = 10 \cdot 9^3 + 10^4 = 17290 > 10^4 \quad \therefore n = 3$$