東京慈恵会医大 2021

1

(ア) 玉の個数が7なので、5以上の目が2回出ている．

左から3個目に赤玉が並ぶのは．

(i) ○○● または ●○●

の順に並ぶとき

(i) $\left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \left(\frac{2}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{2}{6}\right) \times {}_2C_1 = \frac{2^4}{3^5}$

(ii) $\left(\frac{2}{6}\right) \times \left(\frac{2}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{2^3}{3^5}$

(i) + (ii) より $\frac{24}{3^5} = \frac{8}{81}$

(イ) 左から5個目の赤が何個目の赤になるのかで場合分け

(i) 最初の赤、 ○○○○●○ $\left(\frac{4}{6}\right)^4 \times \frac{2}{6} = \frac{16}{3^5}$

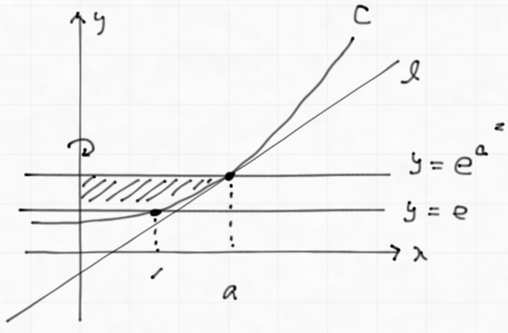
(ii) 2個目の赤、 (○.○, ○●)●○.* $\left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \frac{2}{6} \times {}_3C_2 \times \frac{2}{6} \times 1 = \frac{12}{3^4} = \frac{4}{27}$

(iii) 3個目の赤 ○● ○● ●○ * * $\left(\frac{2}{6}\right)^3 \times 1^2 = \frac{1}{27}$

(i)〜(iii) より $\frac{16+36+9}{243} = \frac{61}{243}$

2 $f(x)=e^{x^2}$ とおく　$f'(x)=2xe^{x^2}$

(1) 接線lは　$y=2ae^{a^2}(x-a)+e^{a^2} \Leftrightarrow y=2ae^{a^2}x+(1-2a^2)e^{a^2}$



$$V=\int_e^{e^{a^2}}\pi x^2\,dy$$

$$=\int_1^a \pi x^2\cdot 2xe^{x^2}\,dx$$

$x^2=t$とおく　$\left(\dfrac{dt}{dx}=2x\ .\ \begin{array}{c|c} x & 1\to a \\ \hline t & 1\to a^2\end{array}\right)$

$$V=\cancel{2}\pi\int_1^{a^2} te^t\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2x}}\,dt$$

$$=\pi\left[te^t\right]_1^{a^2}-\pi\int_1^{a^2}e^t\,dt$$

$$=\pi a^2e^{a^2}-\pi e-\pi e^{a^2}+\pi e=\boldsymbol{\pi(a^2-1)e^{a^2}}$$

(2) $S_1=\displaystyle\int_1^a e^{x^2}-2ae^{a^2}x-(1-2a^2)e^{a^2}\,dx$

$$=\int_1^a e^{x^2}dx-\left[ae^{a^2}x^2+(1-2a^2)e^{a^2}x\right]_1^a=\int_1^a e^{x^2}dx-(a^3+a-2a^3-a-1+2a^2)e^{a^2}$$

$$=\int_1^a e^{x^2}dx+(a^3-2a^2+1)e^{a^2}$$

lとx軸の交点　$y=0$として　$x=\dfrac{(2a^2-1)e^{a^2}}{2ae^{a^2}}$

lとy　〃　$x=0$として　$y=(1-2a^2)e^{a^2}$

$$S_2=\frac{1}{2}\left|\frac{(2a^2-1)e^{a^2}}{2a\cancel{e^{a^2}}}\times(1-2a^2)\cancel{e^{a^2}}\right|=\frac{1}{4a}(2a^2-1)^2e^{a^2}$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{a\to\infty}\left\{\frac{\int_1^a e^{x^2}dx}{\frac{4a^4-4a^2+1}{4a}e^{a^2}}+\frac{a^3-2a^2+1}{\frac{4a^4-4a^2+1}{4a}}\right\}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left\{\frac{4a}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\int_1^a e^{x^2}dx+\frac{4-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^3}}{4-\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^4}}\right\}$$

ここで

$\dfrac{4a}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\displaystyle\int_1^a e^{x^2}dx$ について　$\dfrac{4a}{(2a^2-1)^2}\displaystyle\int_1^a e^{x^2}dx>0$ は明らかで

$$\frac{4a}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\int_1^a e^{x^2}dx\leqq\frac{4a}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\int_1^a e^{a^2}dx=\frac{4a(a-1)}{(2a^2-1)^2}=\frac{4}{(2a-\frac{1}{a})^2}\longrightarrow 0$$

だからはさみうちの原理より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{4a}{(2a^2-1)^2e^{a^2}}\int_1^a e^{x^2}dx=0$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=0+\frac{4}{4}=\boldsymbol{1}$$

3 (1) $0<x\leqq\pi$ のとき $\sin 2ax\leqq 0$ となるのは

$\frac{\pi}{2a}\leqq x\leqq\frac{2}{2a}\pi$, $\frac{3}{2a}\pi\leqq x\leqq\frac{4}{2a}\pi$, $\dots$ $\frac{2a-1}{2a}\pi\leqq x\leqq\frac{2a}{2a}\pi=\pi$　　$\frac{\pi}{2a}\sim\frac{2\pi}{2a}$

これらを順に区間 $k_1, k_2 \dots k_a$ と呼ぶ

$\cos x=\cos 2ax$ となるのは　$2ax=\pm x+2\pi n$ (nは整数)のときで

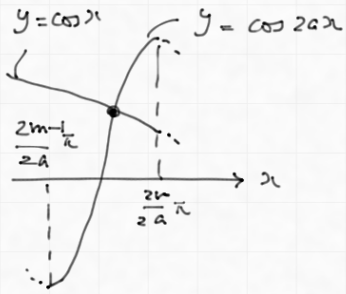
$x=\frac{2\pi}{2a\pm1}\times n$

$0<x\leqq\pi$ の範囲で上式を満たすのは小さいものから順に

$\frac{2\pi}{2a+1}, \frac{2\pi}{2a-1}, \frac{4\pi}{2a+1}, \frac{4\pi}{2a-1}, \dots \frac{2a\pi}{2a+1} \dots$ ①

$\cos x$ は $0<x\leqq\pi$ で単調に減少し、$\cos 2ax$ は $k_1, k_2, \dots k_{2a}$ のいずれの区間でも

-1 から 1 まで単調に増加する



区間 k_m は $\frac{2m-1}{2a}\pi\leqq x\leqq\frac{2m}{2a}\pi$ で

グラフは右のようになっており

この区間の中の交点は ①のうちの $x=\frac{2m}{2a+1}\pi$

よって $x_m=\frac{2m}{2a}\pi-\frac{2m}{2a+1}\pi=\frac{m\pi}{a(2a+1)}$

となり、区間 $k_1, k_2, \dots k_a$ の中に1つずつ条件を満たす閉区間が存在するので

閉区間の個数は a 個　∴ $n=a$

また、$\theta_k=2b(2a+1)x_k=2b(\cancel{2a+1})\times\frac{k\pi}{a(\cancel{2a+1})}=2k\pi\frac{b}{a}$　($k=1,2,\dots a$)

(2) $1\leqq i<j\leqq a$ を満たす i, j に対し、$r_i=r_j$ が成り立つと仮定する。

このとき、仮定より、

$$ib\equiv jb \pmod a$$

$$\therefore\ b(j-i)\equiv 0 \pmod a \quad \dots ②$$

が成り立つ。ここで b は a と互いに素なので　$b\not\equiv 0 \pmod a$ であり、$1\leqq i<j\leqq a$ より

$1\leqq j-i\leqq a-1$ だから　$j-i\not\equiv 0 \pmod a$

よって ② は成り立たず、仮定は矛盾している。

よって $1\leqq i<j\leqq a$ を満たす任意の自然数 i, j に対して $r_i\neq r_j$

このとき、$r_1, r_2, r_3, \dots, r_{a-1}, r_a$ は全て異なる値をとるが、a で割った余りは

$0, 1, 2, \dots, a-1$ の a 通りしかないので　集合 $\{r_1, r_2, \dots, r_a\}$ と $\{0, 1, 2, \dots a-1\}$ は

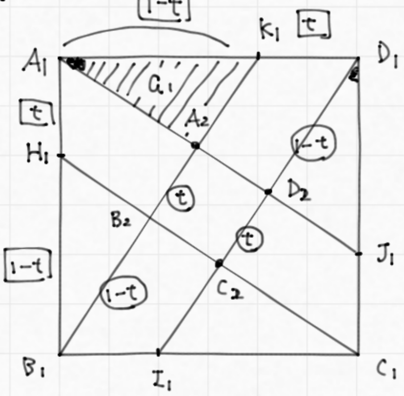
一致していることになる。… ③

$\theta_k=2k\pi\frac{b}{a}=2\pi\left(q_k+\frac{r_k}{a}\right)$ だから、　$z_k=\left(\cos 2\pi\frac{r_k}{a}, \sin 2\pi\frac{r_k}{a}\right)$ であり、

③ より $\{z_1, z_2, \dots z_a\}=\{(1,0), (\cos\frac{2\pi}{a}, \sin\frac{2\pi}{a}), (\cos\frac{2\pi}{a}\times2, \sin\frac{2\pi}{a}\times2), \dots, (\cos\frac{2\pi}{a}(a-1), \sin\frac{2\pi}{a}(a-1))\}$

となり、$z_1\sim z_a$ は単位円を a 等分する分点であると分かる。

4



$A_nB_nC_nD_n$ の 1辺の長さを l_n とする $(l_1=1)$

$\angle D_nA_nJ_n=\theta$ とおく $\tan\theta=\dfrac{D_nJ_n}{A_nD_n}=\dfrac{1-t}{1}=1-t$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2-2t+t^2}},\quad \sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\frac{1-t}{\sqrt{2-2t+t^2}}$$

$$l_{n+1}=\frac{l_n}{\cos\theta}-(1-t)l_n\cos\theta-(1-t)l_n\sin\theta$$

$$=l_n\left(\sqrt{2-2t+t^2}-(1-t)\frac{2-t}{\sqrt{2-2t+t^2}}\right)=l_n\frac{t}{\sqrt{2-2t+t^2}}$$

$$\therefore\quad l_n=l_1\left(\frac{t}{\sqrt{2-2t+t^2}}\right)^{n-1}=\left(\frac{t}{\sqrt{2-2t+t^2}}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{2}(1-t)l_n\cos\theta\times(1-t)l_n\sin\theta=\frac{1}{2}(1-t)^2l_n^2\times\frac{1-t}{2-2t+t^2}$$

$$=\frac{(1-t)^3}{2(2-2t+t^2)}\times\left(\frac{t^2}{2-2t+t^2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が $\frac{1}{8}$ に収束する条件は $-1<\dfrac{t^2}{2-2t+t^2}<1 \Leftrightarrow t<1$ のときで、$0<t<1$だから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{(1-t)^3}{2(2-2t+t^2)}\times\frac{1}{1-\frac{t^2}{2-2t+t^2}}=\frac{(1-t)^3}{2(2-2t+t^2)-2t^2}=\frac{(1-t)^2}{4}$

となるので $\dfrac{(1-t)^2}{4}=\dfrac{1}{8}$ より, $(1-t)^2=\dfrac{1}{2}$ $\quad t=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\mathbf{2-\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$