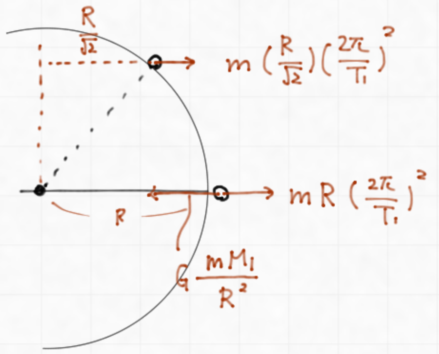
2022 東京大

1



I (1) $f_0 = \dfrac{4\pi^2 mR}{T_1^2}$ $\quad f_1 = \dfrac{2\pi^2 mR}{T_1^2}$

(2) $mg_0 = G\dfrac{mM_1}{R^2} - mR\dfrac{4\pi^2}{T_1^2}$

$$g_0 = \frac{GM_1}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T_1^2}$$

II (1) 運動方程式

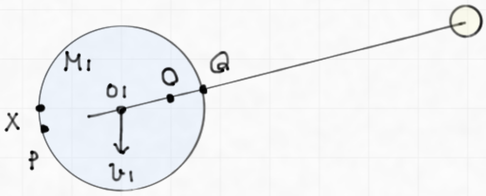
$$M_1\frac{v_1^2}{a_1} = G\frac{M_1M_2}{a^2}, \quad M_2\frac{v_2^2}{a_2} = G\frac{M_1M_2}{a^2}$$

重心の関係より $a_1 : a_2 = M_2 : M_1$

$a_1 + a_2 = a$ だから $a_1 = \dfrac{M_2}{M_1+M_2}a$, $a_2 = \dfrac{M_1}{M_1+M_2}a$

以上を連立して

$$v_1 = \sqrt{GM_2\frac{a_1}{a^2}} = \frac{M_2}{a}\sqrt{\frac{Ga}{M_1+M_2}} \qquad v_2 = \frac{M_1}{a}\sqrt{\frac{Ga}{M_1+M_2}}$$



(2) 地球の中心を O_1 とすると

$$\overrightarrow{O_1O} = a_1\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T_2}\right)$$

$$\overrightarrow{O_1X} = (-R, 0)$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1X} = \left(-a_1\cos\frac{2\pi}{T_2}t - R,\ -a_1\sin\frac{2\pi}{T_2}t\right)$$

(3) $\overrightarrow{OX}$ の軌跡を考えると、中心$(-R, 0)$, 半径 a_1, 角速度 $\dfrac{2\pi}{T_2}$ の円運動をしていることが分かる

$f_c = m a_1\left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 = 4\pi^2\dfrac{ma_1}{T_2^2}$ ここで $a_1 \times \dfrac{2\pi}{T_2} = v_1$ および $\dfrac{M_1v_1^2}{a_1} = G\dfrac{M_1M_2}{a^2}$ だから

$$f_c = 4\pi^2 m a_1 \times \left(\frac{v_1}{2\pi a_1}\right)^2 = \frac{mv_1^2}{a_1} = m\frac{GM_2}{a^2} = \frac{GmM_2}{a^2}$$

(4) $f_P = f_c - G\dfrac{mM_2}{(a+R)^2} = GmM_2\left\{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{(a+R)^2}\right\}$ … 遠ざかる向き。

$f_Q = G\dfrac{mM_2}{(a-R)^2} - f_c = GmM_2\left\{\dfrac{1}{(a-R)^2} - \dfrac{1}{a^2}\right\}$ … 近付く向き

III $f_S = GmM_3\left\{\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{(b+R)^2}\right\}$ … 太陽から遠ざかる向き。

$$\frac{f_S}{f_P} = \frac{M_3}{M_2}\left\{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{(b+R)^2}\right\}\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+R)^2}\right\}^{-1} = \frac{M_3}{M_2}\times\frac{a^2}{b^2}\left\{1 - \left(\frac{b}{b+R}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{a+R}\right)^2\right\}^{-1}$$

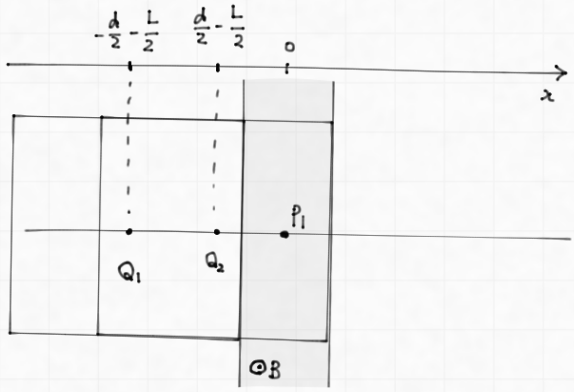
$$= \frac{M_3}{M_2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\left\{1 - \left(1 - \frac{R}{b+R}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{a+R}\right)^2\right\}^{-1} \fallingdotseq \frac{a^2M_3}{b^2M_2}\left(1 - 1 + \frac{2R}{b+R}\right)\left(1 - 1 + \frac{2R}{a+R}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a^2M_3}{b^2M_2}\times\frac{\cancel{2R}}{b+R}\times\frac{a+R}{\cancel{2R}} \fallingdotseq \left(\frac{3.8\times10^8}{1.5\times10^{11}}\right)^3\times\frac{2.0\times10^{30}}{7.3\times10^{22}} = \frac{3.8^3\cdot2.0}{1.5^3\cdot7.3}\times\frac{10^{24}\cdot10^{30}}{10^{33}\cdot10^{22}} = \frac{109.7}{24.63}\times10^{-1} = 0.445\ldots$$

$$0.4 < \frac{f_S}{f_P} < 0.5$$

2 I (1) ア $\Delta\Phi = BLd$

$\bar{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BLv_a$



イ ジュール熱

$P\Delta t = \frac{|E|}{R}\times|E|\times\Delta t$

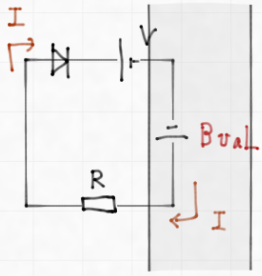
$= \frac{B^2L^2v_a^2}{R}\times\frac{d}{v_a} = \frac{B^2L^2v_a d}{R}$

(2) 発生したジュール熱の分だけ、エネルギーが減少した。

$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{B^2L^2v_a d}{R}$

$m\times\frac{(v_0-v_1)\cancel{(v_0+v_1)}}{\cancel{2}} = \frac{B^2L^2\cancel{v_a}d}{R}$ $\left(\because\ v_a = \frac{v_0+v_1}{2}\right)$ $v_1 = v_0 - \frac{B^2L^2d}{mR}$

II (1) 上向きの磁束が増加するので、それを妨げる向きの磁場を作るような時計まわりの電流を流そうとする誘導起電力が発生(実際に電流もその向きに流れる)



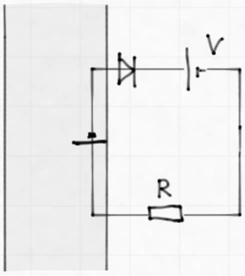
$Bv_aL - V = IR$ $I = \frac{Bv_aL - V}{R}$

(2) 左手の法則より、力の向きはx軸負の向き。力をFとして

$F = -BIL = \frac{BL(V-Bv_aL)}{R}$

(3) 上向きの磁束が減少するので誘導起電力は反時計まわりの電流を流そうとする向きで、ダイオードに逆電圧をかけているため電流は流れない

$F = 0$



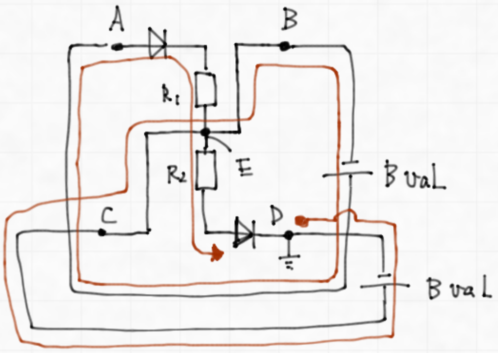
(4) 通過毎のエネルギーの変化は、ローレンツ力の行う仕事から

$Fd = \frac{BL(V-Bv_aL)d}{R}$ (<0 に注意)

したがって速度は徐々に減少し、通過毎の減少量は小さくなる。グラフは③

(5) $n\to\infty$ のとき $V - Bv_aL \to 0$ となる。 $v_\infty = \frac{V}{BL}$

III



(1) 左図の赤矢印のルートをたどって考える

Cの電位 Bv_aL → Bの電位 Bv_aL → Aの電位 $2Bv_aL$

(2) Eの電位は Bv_aL だから R_1、R_2 にかかる電圧は、ともに Bv_aL となっている。それぞれの抵抗を流れる電流を i_1、i_2 とすると $i_1 = \frac{Bv_aL}{R_1}$, $i_2 = \frac{Bv_aL}{R_2}$, $R_1 + R_2 = 6R$

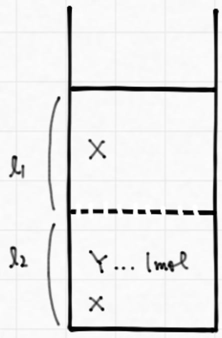
ローレンツ力 f は $f = Bi_1L + Bi_2L$ だから エネルギーの減少量は $|fd|$

また $Q_3 \to Q_4$ のとき、ダイオードに逆電圧がかかるので電流は流れない。

以上より $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = fd = B^2L^2v_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)d$ $v_0 - v_2 = \frac{B^2L^2d}{m}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$

$R_1 + R_2 \geq 2\sqrt{R_1R_2}$ より $R_1R_2 \leq 9R^2$ $v_0 - v_2 \geq \frac{2B^2L^2d}{3mR}$ 等号は $R_1 = R_2 = 3R$ のとき

3



気体 X は 領域 1.2 で 同じ圧力. 気体 Y は 領域 2のみに 存在する.

I (1) 1回の衝突での力積 $2m_X v_z$ 衝突までに要する時間 $\frac{2(l_1+l_2)}{v_z}$

1秒間に与える力積 $\cancel{2}m_X v_z \times \frac{v_z}{\cancel{2}(l_1+l_2)} = \frac{m_X v_z^2}{l_1+l_2}$

1秒間に 1mol の気体Xが与える力積の総和 $\frac{m_X \overline{v_z^2}}{l_1+l_2} \times N_A = F_1 \times 1$

$V_1 = Sl_1$, $V_2 = Sl_2$ を代入 $F_1 = \frac{m_X \overline{v_z^2} N_A S}{V_1+V_2}$

(2) 気体Yが底面に与える力は (1) と同様で $\frac{m_Y \overline{w_z^2} N_A S}{V_2}$ だから.

$$F_2 = \frac{m_X \overline{v_z^2} N_A S}{V_1+V_2} + \frac{m_Y \overline{w_z^2} N_A S}{V_2}$$

(3) $\frac{1}{2} m_X \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} m_Y \overline{w_z^2} = \frac{1}{2} kT$.

$$p_2 = \frac{F_2}{S} = kN_AT\left(\frac{1}{V_1+V_2} + \frac{1}{V_2}\right) = RT\left(\frac{1}{V_1+V_2} + \frac{1}{V_2}\right)$$

(4) $\left(\frac{1}{2} m_X \overline{v_z^2} \times 3 + \frac{1}{2} m_Y \overline{w_z^2} \times 3\right) \times N_A = \frac{3}{2} \times 2RT = 3RT$

II X $p_1(V_1+V_2) = RT$ …① Y $(p_2-p_1)V_2 = RT$ …②

↓ $0 = \underset{\boxed{負}}{W_X} + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot R\Delta T$ …⑤

$(p_1+\Delta p_1)(V_1+V_2-\Delta V_1) = R(T+\Delta T)$ …③ $(p_2+\Delta p_2-p_1-\Delta p_1)V_2 = R(T+\Delta T)$ …④

(1) $W_X \fallingdotseq -p_1\Delta V_1$ だから. ⑤より $3R\Delta T = p_1\Delta V_1$ $\Delta T = \frac{p_1\Delta V_1}{3R}$

(2) ③に (1), ① を代入

$$(p_1+\Delta p_1)(V_1+V_2-\Delta V_1) = p_1(V_1+V_2) + \frac{1}{3}p_1\Delta V_1$$

$$\Delta p_1(V_1+V_2) - p_1\Delta V_1 \fallingdotseq \frac{1}{3}p_1\Delta V_1$$

$$\frac{\Delta p_1}{p_1} = \frac{4}{3}\frac{\Delta V_1}{V_1+V_2}$$

III X $p_1(V_1+V_2) = RT$ …① Y $(p_2-p_1)V_2 = RT$ …②

定圧 ↓ $Q = p_1V_1 + \frac{3}{2} \cdot 2R(T'-T)$ …⑧

$p_1(2V_1+V_2) = RT'$ …⑥ $(p_2'-p_1)V_2 = RT'$ …⑦

(1) ⑥ ① より $T' = \frac{2V_1+V_2}{R} \times \frac{RT}{V_1+V_2} = \frac{2V_1+V_2}{V_1+V_2}T$

(2) ⑧ より $Q = p_1V_1 + 3R(T'-T) = \frac{V_1}{V_1+V_2}RT + 3R\frac{V_1}{V_1+V_2}T = \frac{4V_1RT}{V_1+V_2}$