愛知医科大学2022

1 (1) (i) $x+\frac{1}{x}=t$ とおく.　$t^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$ だから

$x^3+\frac{1}{x^3}=488$ は　$t^3-3t=488 \Leftrightarrow (t-8)(t^2+8t+61)=0$

ここで $t^2+8t+61=(t+4)^2+45 \geqq 45$ だから $t^2+8t+61=0$ を満たす t は存在しない.

よって $t=8$.　すなわち $x+\frac{1}{x}=\mathbf{8}$

(ii) $t^4=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$,　$t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ より

$$x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6=t^4-4(t^2-2)-6=8^4-4(8^2-2)-6=\mathbf{3842}$$

(2) (i) $(1+x)^k$ について x の1次の項の係数は ${}_kC_1$ だから.

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n$ の1次の係数は.

$${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1=1+2+3+\cdots+n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

(ii) $k\geqq 2$ のとき. $(1+x)^k$ の x の2次の項の係数は ${}_kC_2$ だから. ($k=1$ のときは2次の項はない)

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2=\frac{1}{2}2\cdot1+\frac{1}{2}\times3\times2+\frac{1}{2}\times4\times3+\cdots+\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{2}l(l+1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}+\frac{1}{4}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{12}n(n-1)(2n-1+3)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)}$$

(iii) $k\geqq 3$ のとき $(1+x)^k$ の x の3次の項の係数は ${}_kC_3$ だから.　$\left({}_kC_3=\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\right)$

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_nC_3$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+1)(k+2)}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-2}(k^3+3k^2+2k)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left\{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}^2+\frac{3}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)+(n-2)(n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}(n-1)^2(n-2)^2+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(2n-3)+(n-1)(n-2)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+2+4n-6+4)=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2+n)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)}$$

(3) (ア) より $\vec{a}=-2\vec{b}-3\vec{c}$ を (イ)の各式に代入

$$(-2\vec{b}-3\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(-2\vec{b}-3\vec{c})=k$$

$$-2|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-2\vec{b}\cdot\vec{c}-3|\vec{c}|^2=k$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=k,\quad |\vec{b}|^2=-2k,\quad |\vec{c}|^2=-k$$

(i) $|\vec{a}|^2=|-2\vec{b}-3\vec{c}|^2=4|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2=-8k+12k-9k=\mathbf{-5k}$

(ii) $\cos\theta=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{k}{\sqrt{-2k}\sqrt{-k}}=\dfrac{k}{\sqrt{2}|k|}=-\dfrac{k}{\sqrt{2}k}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

($\because$ $|\vec{b}|^2=-2k$ より $k\leqq 0$)

$\therefore\ \theta=\mathbf{135^\circ}$

(4) n人での交換方法を f_n 通りと表す

(i) 3人を A_1, A_2, A_3 それぞれのプレゼントを a_1, b_1, c_1 と表す.

プレゼントの交換方法は,

A_1	A_2	A_3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

の2通り だから $f_3=\mathbf{2}$ 通り

(ii) 自分のもってきたプレゼントをもらうことも含めた場合の交換方法は $4!=24$ 通り.

その中で.

4人とも自分のプレゼント … 1通り

3人が 〃 … 0通り

2人が 〃 … $_4C_2\times f_2=6\times 1=6$ 通り.

1人が 〃 … $_4C_1\times f_3=4\times 2=8$ 通り

したがって $f_4=24-1-0-6-8=\mathbf{9}$ **通り**

(iii) (ii)と同様

$$f_5=5!-1-0-{}_5C_3\times f_2-{}_5C_2\times f_3-{}_5C_1\times f_4$$

$$=120-1-10\times 1-10\times 2-5\times 9=\mathbf{44}\ \textbf{通り}$$

2

(1) $x^2+y^2-2ax-2by = f(x,y)$ とおく.

(x,y) が円の内部にあるとき $f(x,y)<0$. 外部にあるとき $f(x,y)>0$ だから

A と B の一方が内部, 他方が外部にあるとき, $f(0,2)$ と $f(2,2)$ が異符号となっている

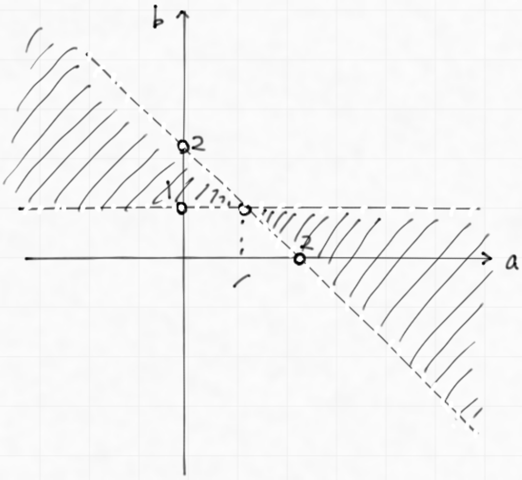
$f(0,2)\times f(2,2)<0$

$\Leftrightarrow \quad (4-4b)\times(4+4-4a-4b)<0$

$\Leftrightarrow \quad (1-b)(2-a-b)<0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-b>0 \text{ かつ } 2-a-b<0 \\ 1-b<0 \text{ かつ } 2-a-b>0 \end{cases}$

よって右図斜線部 (境界除く)



(2) A, B がいずれも円の外部にあるので

$f(0,2)>0 \Leftrightarrow b<1 \quad \cdots ①$

$f(2,2)>0 \Leftrightarrow a+b<2 \quad \cdots ②$

線分 AB 上の点を P とすると, P は $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2-2s \\ 2 \end{pmatrix}$ $(0<s<1)$ と表すことができ, AB と C が共有点を持つので.

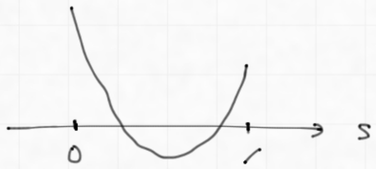
$f(2-2s,\ 2)=0 \quad \cdots ③$

を満たす s が $0<s<1$ の範囲に存在する

③より $(2-2s)^2+4-2a(2-2s)-4b=0$

$\Leftrightarrow \quad s^2+(a-2)s-a-b+2=0$

上式左辺を $f(s)$ と表す.



$f(0)=-a-b+2>0 \quad (\because ②)$

$f(1)=1-b>0 \quad (\because ①)$

だから $f(s)$ のグラフが $0<s<1$ で s 軸と交わるための条件は

軸 $s=\frac{2-a}{2}$ が $0<s<1$ の範囲に存在し, かつ, 判別式 D が $D\geqq 0$ を満たせばよい.

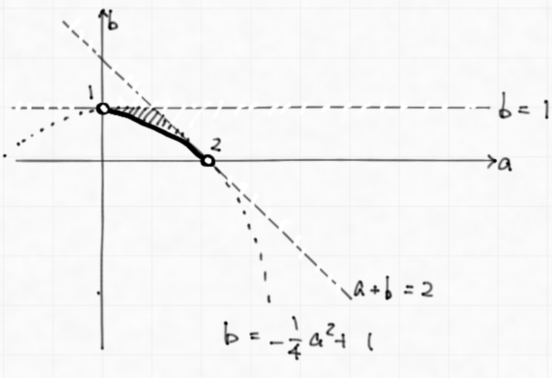
$0<\frac{2-a}{2}<1 \Leftrightarrow 0<a<2 \quad \cdots ④$

$D=(a-2)^2+4(a+b-2)=a^2+4b-4\geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\geqq -\frac{1}{4}a^2+1 \quad \cdots ⑤$

① ② ④ ⑤ より

右図斜線部

(境界は太線部は含み, 破線部は除く)



3

(1) $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$= -e^{-x}\cos x - \left(-e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx\right)$

$\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$ （Cは積分定数）

(2) $e^{-x}\cos x = 0$ となるのは $e^{-x} > 0$ だから $\cos x = 0$ のときで、

$x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $\cdots$, $x_n = \frac{2n-1}{2}\pi$, $\cdots$

したがって $k \geqq 2$ のとき

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-x}\cos x\,dx = \int_{\frac{2k-3}{2}\pi}^{\frac{2k-1}{2}\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_{\frac{2k-3}{2}\pi}^{\frac{2k-1}{2}\pi}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{2k-1}{2}\pi}\left(\sin\frac{2k-1}{2}\pi - 0\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{2k-3}{2}\pi}\left(\sin\frac{2k-3}{2}\pi - 0\right)$$

ここで $\sin\frac{2k-1}{2}\pi$ について、kが奇数のときは1、kが偶数のときは-1となるので

$\sin\frac{2k-1}{2}\pi = (-1)^{k-1}$ となり、同様に $\sin\frac{2k-3}{2}\pi = (-1)^k$ となるので、

$$I_k = \frac{1}{2}e^{-\frac{2k-1}{2}\pi}(-1)^{k-1} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2k-3}{2}\pi}(-1)^k$$

$$= \frac{1}{2}e^{(-k+1)\pi} \times e^{-\frac{1}{2}\pi} \times (-1)^{k-1} - \frac{1}{2}e^{-k} \times e^{\frac{3}{2}\pi} \times (-1)^k$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi}(-e^{-\pi})^{k-1} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}\pi}(-e^{-\pi})^k$$

また $k=1$ のとき

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} - 0 - 0 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} \times (-e^{-\pi})}{1+e^{-\pi}} - \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}\pi}\cdot e^{-2\pi}}{1+e^{-\pi}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} \times \frac{1}{e^{\pi}+1} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{+\frac{1}{2}\pi}}{e^{\pi}+1}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}\cancel{(1+e^{\pi})}}{\cancel{e^{\pi}+1}} + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k = \lim_{n\to\infty}\int_0^{x_n} I_k\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{x_n} = \cdots = \frac{1}{2}$ と、まとめて計算できます。