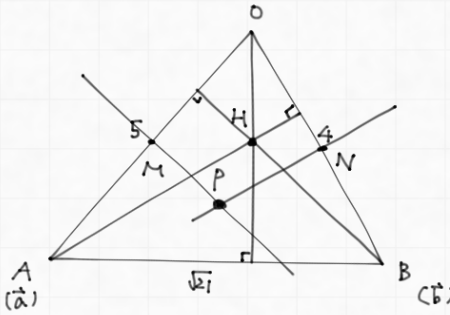
関西医科大学2021



1 (1) $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=4.$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 25+16-2\vec{a}\cdot\vec{b}=21 \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=10$

$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ とおく. また. OA, OB の中点を M, N とする

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{a}=0 \iff (\frac{1}{2}\vec{a}-\alpha\vec{a}-\beta\vec{b})\cdot\vec{a}=\frac{25}{2}-25\alpha-10\beta=0 \quad \cdots ①$

$\overrightarrow{PN}\cdot\vec{b}=0 \iff (\frac{1}{2}\vec{b}-\alpha\vec{a}-\beta\vec{b})\cdot\vec{b}=8-10\alpha-16\beta=0 \quad \cdots ②$

① ② より $\beta=\frac{1}{4},\ \alpha=\frac{2}{5} \qquad \overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=0 \iff (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=10s+16t-10=0 \quad \cdots ③$

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=0 \iff (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=25s+10t-10=0 \quad \cdots ④$

③ ④ より $t=\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{5} \qquad \overrightarrow{OH}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{1+2}\overrightarrow{OH}=\frac{4}{15}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{15}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ 　D は △OAB の **重心**

(2) $x^2-|x|y+y^2=3 \quad \cdots ①$

$(y-\frac{1}{2}|x|)^2+\frac{3}{4}x^2=3$

$x^2=4-\frac{4}{3}(y-\frac{1}{2}|x|)^2 \leqq 4$

上の式を満たす x は $-2\leqq x\leqq 2$ だから $x=-2,-1,0,1,2$

$x=-2$ のとき. ① は $4-2y+y^2=3 \iff (y-1)^2=0 \quad y=1 \quad (x,y)=(-2,1)$

$x=-1$ のとき ① は $1+y+y^2=3 \iff (y-1)(y+2)=0 \quad y=1,-2 \quad (x,y)=(-1,1),(-1,-2)$

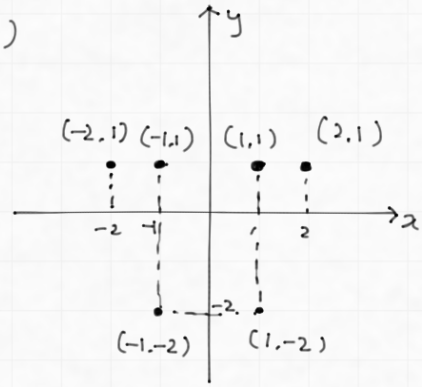
$x=0$ のとき ① は $y^2=3 \quad y=\pm\sqrt{3}$ … 不適

$x=1$ のとき ① は $1+y+y^2=3 \iff y=1,-2. \quad (x,y)=(1,1),(1,-2)$

$x=2$ のとき ① は $4-2y+y^2=3 \iff y=1 \quad (x,y)=(2,1)$

$x^2-|x|y+y^2=3$ を満たすのは

$(x,y)=(-2,1),(-1,1),(-1,-2),(1,1),(1,-2),(2,1)$



関西医科大学2021

(3)

A地域	陽性	陰性	合計
病気にかかっている	$\frac{1}{56}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{56}\times\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{56}}$
かかっていない	$\frac{55}{56}\times\frac{1}{20}$	$\frac{55}{56}\times\frac{19}{20}$	$\frac{55}{56}$
合計	※		**1**

B地域	陽性	陰性	合計
病気にかかっている	$\frac{3}{4}P_B$	$\frac{1}{4}P_B$	P_B
かかっていない	$\frac{1}{20}(1-P_B)$	$\frac{19}{20}(1-P_B)$	$1-P_B$
合計	$\mathbf{\frac{3}{20}}$	$\frac{17}{20}$	1

太字は最初から分かっていること

A地域で陽性と判定される確率 (*) $= \frac{1}{56}\times\frac{3}{4}+\frac{\cancel{55}^{11}}{56}\times\frac{1}{\cancel{20}_{4}} = \frac{14}{224} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

検査で陽性と判定されたときに実際に病気にかかっている確率

$$\frac{1}{56}\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{16} = \mathbf{\frac{3}{14}}$$

B地域で病気にかかっている人の割合を P_B とすると

$$\frac{3}{4}P_B+\frac{1}{20}(1-P_B)=\frac{3}{20} \iff 15P_B+1-P_B=3 \qquad P_B=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

検査で陽性と判定されたときに実際に病気にかかっている確率

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}\div\frac{3}{20} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

関西医科大学2021

2

(1) $\alpha^7 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ …①

$\alpha^7 - 1 = 0 \iff (\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)(\alpha-1) = 0$

ここで $\alpha \neq 1$ だから $\alpha-1$ で両辺を割って $\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ …②

$\beta+\gamma = \alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6 = \alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = \mathbf{-1}$ (∵②)

$\beta\gamma = (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6) = \alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}$

$= \alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3$ (∵①)

$= \alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+3 = \mathbf{2}$ (∵②)

(2) 解と係数の関係より，β, γ を2解にもつ2次方程式の1つは

$X^2-(-1)X+2=0$ $\quad X = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

β の虚部は $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8}{7}\pi = \sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{6}{7}\pi\cos\frac{2}{7}\pi$

ここで $\sin\frac{2}{7}\pi>0$，$\sin\frac{6}{7}\pi>0$，$\cos\frac{2}{7}\pi>0$ だから，上の式は必ず正．

よって $\beta = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$，$\gamma = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

(3) (2)より，β の虚部が $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8}{7}\pi$ だから その和は $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{3\pi}{7}$

$= \frac{1}{4}\sin\frac{6}{7}\pi + \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{7}}{8}}$

関西医科大学2021

3 (1) $a_1 = \frac{1}{13}$

$5a_2 = 10a_1 - a_2 a_1$ より $5a_2 = \frac{10}{13} - \frac{1}{13}a_2$ $\quad a_2 = \frac{5}{33}$

$5a_3 = 10a_2 - a_3 \cdot a_2$ より $5a_3 = \frac{50}{33} - \frac{5}{33}a_3$ $\quad a_3 = \frac{5}{17}$

$5a_4 = 10a_3 - a_4 \cdot a_3$ より $5a_4 = \frac{50}{17} - \frac{5}{17}a_4$ $\quad a_4 = \frac{5}{9}$

(2) $\{a_n\} = \frac{5}{65}, \frac{5}{33}, \frac{5}{17}, \frac{5}{9}, \cdots$

分母は $2^6+1,\ 2^5+1,\ 2^4+1,\ 2^3+1 \cdots$ と変わっていると推測できる.

つまり $\{a_n\}$ の一般項は $\frac{5}{2^{7-n}+1}$ と予測できるので、これを数学的帰納法により示す

(i) $n=1$ のとき. $\quad a_1 = \frac{5}{2^{7-1}+1} = \frac{1}{65}$ 成立.

(ii) $n=k$ のとき. $\quad a_k = \frac{5}{2^{7-k}+1}$ が成り立つと仮定する.

このとき. $\cancel{5}a_{k+1} = \frac{\cancel{50}\,10}{2^{7-k}+1} - \frac{\cancel{5}}{2^{7-k}+1}a_{k+1}$

$$\frac{2^{7-k}+2}{2^{7-k}+1}a_{k+1} = \frac{10}{2^{7-k}+1}$$

$$a_{k+1} = \frac{10}{2^{7-k}+2} = \frac{5}{2^{7-(k+1)}+1}$$

よって 仮定の下で $n=k+1$ のときも予測は成り立つ.

(i)(ii) より 数学的帰納法により 予測は証明された $\quad \therefore a_n = \frac{5}{2^{7-n}+1}$

(別解)
$a_n a_{n+1}$ で割って
$\frac{1}{a_n} = \frac{10}{a_{n+1}} - 1$
$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおいて…

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2^{7-n}+1} = 5$ $\quad a_m = \frac{5}{2^{7-m}+1} = \frac{5}{2}$ より $2^{7-m} = 1$ $\quad m = 7$

(4) 左辺 $= a_{7-k} + a_{7+k} = \frac{5}{2^{7-(7-k)}+1} + \frac{5}{2^{7-(7+k)}+1} = \frac{5}{2^k+1} + \frac{5}{2^{-k}+1}$

$= \frac{5}{2^k+1} + \frac{5 \cdot 2^k}{1+2^k} = \frac{5(2^k+1)}{2^k+1} = 5$

証明終

$$\frac{1}{2\cdot 7-1}\sum_{i=1}^{2\cdot 7-1} a_i = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} a_i = \frac{1}{13}\left\{(a_1+a_{13})+(a_2+a_{12})+(a_5+a_{11})+\cdots+(a_6+a_8)+a_7\right\}$$

$$= \frac{1}{13}\times\left(5\times 6 + \frac{5}{2^0+1}\right) = \frac{1}{\cancel{13}}\times\frac{\cancel{65}^{\,5}}{2} = \frac{5}{2}$$

関西医科大学2021

4 (1) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ $\quad \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$

$\frac{dx}{d\theta} = 0$ となるのは $\theta = 0$. $\quad \frac{dy}{d\theta} = 0$ となるのは $\theta = \frac{1}{3}\pi$.

$x = 2\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = \frac{\pi}{2}$. $\quad y = 0$ となるのは $y = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ より $\theta = \frac{11}{6}\pi$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ のとき $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)$

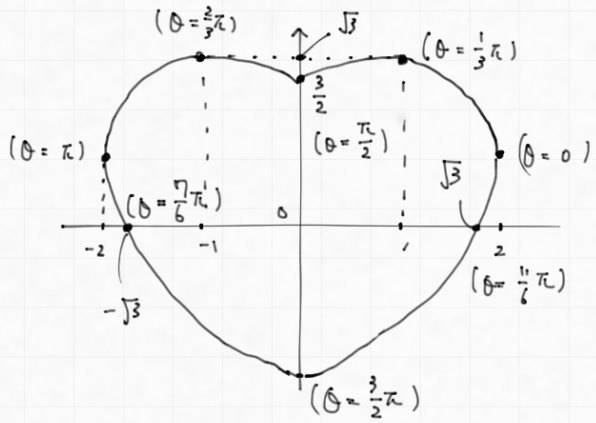
$\frac{dx}{d\theta} = 0$ は $\theta = \pi$ のとき. $\quad \frac{dy}{d\theta} = 0$ となるのは $\theta = \frac{2}{3}\pi$

$x = 0$ となることはなく $\quad y = 0$ となるのは. $y = \sqrt{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ より $\theta = \frac{7}{6}\pi$

増減は

θ	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$			$+$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	/	$+$	0	$-$		$-$	/		$+$
x	2	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	-2	↗	0	↗	2
y	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

グラフの概形は右のようになる.



(2) $2\int_0^2 y_+ - y_- \, dx$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)(-2\sin\theta)\,d\theta - 2\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 6\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 - 3\cos 2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta)'\,d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 3 - 3\cos 2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta)'\,d\theta$$

$$= \left[3\theta - \frac{3}{2}\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[3\theta - \frac{3}{2}\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin^2\theta\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\pi - 0 + \cancel{\sqrt{3}}\right) - (0 - 0 + 0) + (6\pi - 0 + 0) - \left(\frac{9}{2}\pi - 0 + \cancel{\sqrt{3}}\right) = \mathbf{3\pi}$$

(3) $V = \int_0^2 2\pi x(y_+ - y_-)\,dx$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\cdot 2\cos\theta(-2\sin\theta)\,d\theta - 2\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\cdot 2\cos\theta(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin^2\theta\cos\theta + 2\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + 2\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 6\sin^2\theta\cos\theta + 2\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[2\sin^3\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi\left[2\sin^3\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= 2\pi(2 - 0) - 2\pi\left(0 - \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) + 2\pi\left(0 - \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) - 2\pi(-2 - 0) = \mathbf{8\pi}$$