摂南大2022 2日目

1 問1　$xy = \dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{4}{5-3} = \mathbf{2}$

$x+y = \dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3} = 2\sqrt{5}$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\sqrt{5})^2 - 2\cdot 2 = \mathbf{16}$

問2　$(0,4)$を通るので　$4 = b$

$(2,k)$　〃　$k = 8 + 2a + b$

$a = \dfrac{k}{2} - 6$，$b = 4$

x軸と異なる2点で交わるとき、$2x^2+ax+b=0$の判別式をDとして.

$D = a^2 - 8b > 0 \Leftrightarrow a^2 > 32 \Leftrightarrow a > 4\sqrt{2},\ a < -4\sqrt{2}$

この方程式の解をα.βとして.　$\alpha+\beta = -\dfrac{a}{2}$，$\alpha\beta = \dfrac{b}{2} = 2$

$|\beta-\alpha| \geqq 1$を満たせばよいので

$|\beta-\alpha|^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \dfrac{a^2}{4} - 8 \geqq 1 \Leftrightarrow a^2 \geqq 36 \Leftrightarrow a \geqq 6,\ a \leqq -6$

ここに $a = \dfrac{k}{2} - 6$ を代入　$\dfrac{k}{2} - 6 \geqq 6$，$\dfrac{k}{2} - 6 \leqq -6 \Leftrightarrow k \geqq \mathbf{24}$，$k \leqq \mathbf{0}$

問3　一の位が0のとき千の位の方が必ず大きな数となる.

千の位は0にはならないので　一の位と千の位は 1.2.3.4.5 のいずれかで.

千の位の方が大きな数 … ${}_5C_2 \times 1 = 10$ 通り.

百の位，十の位は他の残った4つの数から異なる2つを選んで並べる　${}_4P_2 = 12$

よって　$10 \times 12 = \mathbf{120}$　(コサシ)

(スセソ) 百の位が0のとき. 千,十,一の位はどのように並べても条件を満たす.　${}_5P_3 = 60$

百の位が0以外のとき. 百.十の位は1〜5　${}_5C_2 \times 1 = 10$ 通り.

千の位は残った4つの数のうちの0以外. 一の位は0でも良い　$3 \times 3 = 9$　　$10 \times 9 = 90$

よって　$60 + 90 = \mathbf{150}$ 通り

(タチ)

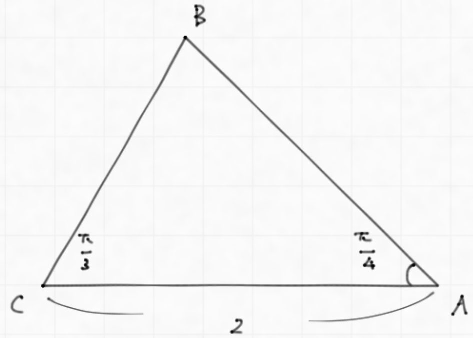
4213	1	1
4215	1	2
423*	3	5
425*	3	8
43**	${}_4P_2 = 12$	20
45**	${}_4P_2 = 12$	32
5***	${}_5P_3 = 60$	92

92 通り

問4 $\sin\angle ABC = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{5}{12}\pi$

$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (ツテト)



正弦定理, 外接円半径をRとして

$2R = \frac{2}{\sin\angle ABC}$ $\quad R = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (ナニ)

$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2R$ より $BC = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - 2$

$ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{3}-2) \times \sin\frac{\pi}{3} = 3 - \sqrt{3}$ (ヌネ)

問5 $y = t^2 - 2 - 5t + 6 = t^2 - 5t + 4$ (ノハ)

$= \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 - \frac{25}{4} = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ だから $t = \frac{5}{2}$ のとき 最小値 $-\frac{9}{4}$
(ヒフ) (ヘホ)

$t = \frac{5}{2} = 2^x + 2^{-x}$ より. $(2^x)^2 - \frac{5}{2}\cdot 2^x + 1 = 0 \iff \left(2^x - \frac{1}{2}\right)(2^x - 2) = 0$

$x = 1, -1$ (マミ)

問6 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$

$\{a_n + 3\}$は初項 $a_1 + 3$, 公比 2 の等比数列

$a_n + 3 = (1+3) \times 2^{n-1}$

$a_n = 2^{n+1} - 3 > 2000$
(ムメ)

$2^{n+1} > 2003$

$n = 10 \quad 2^{11} = 2048 > 2003$

$n = 9 \quad 2^{10} = 1024 < 2003$ $\qquad n = 10$ (モヤ)

II

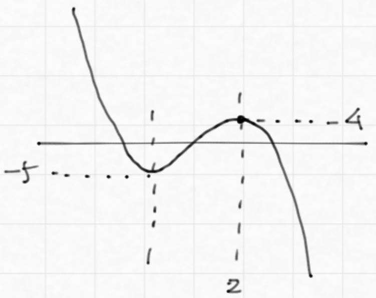
問1　$k^2+7k = -2x^3+9x^2-12x$

右辺を $f(x)$ として　$f'(x) = -6x^2+18x-12 = -6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1, 2$. 増減は右の通り

$f(1) = -5$, $f(2) = -4$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘



$y=f(x)$ と $y=k^2+7k$ が異なる3点で交わるとき,

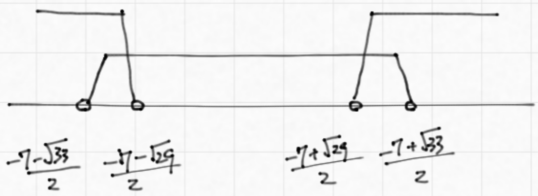
$f(x)=k^2+7k$ は異なる3つの解をもつ.

そのための条件は 左グラフより

$$-5 < k^2+7k < -4$$

$\iff$　$k^2+7k+5>0$ かつ $k^2+7k+4<0$

$\iff$　$k < \frac{-7-\sqrt{29}}{2}$, $k > \frac{-7+\sqrt{29}}{2}$　かつ　$\frac{-7-\sqrt{33}}{2} < k < \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$

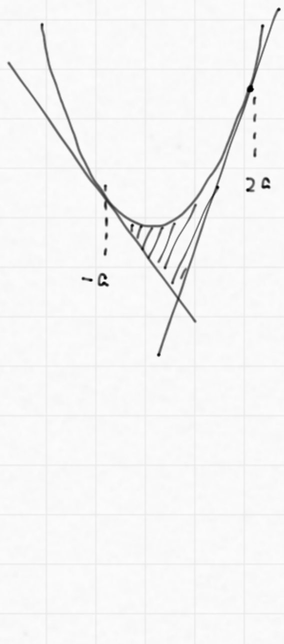


∴　$\frac{-7-\sqrt{33}}{2}$ (アイウエ) $< k <$ $\frac{-7-\sqrt{29}}{2}$ (オカキク)

$\frac{-7+\sqrt{29}}{2}$ (ケコサシ) $< k <$ $\frac{-7+\sqrt{33}}{2}$ (スセソタ)

問2　$(x^2)' = 2x$ だから　l_1: $y = 2\cdot 2a(x-2a)+4a^2$　$\iff$　$y = 4ax - 4a^2$ (チツ)

l_2: $y = 2(-a)(x+a)+a^2$　$\iff$　$y = -2ax - a^2$ (テ)



公式　$\frac{1}{12}(2a-(-a))^3 = 144$

$\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{12}} \times 3^{\cancel{3}\,2} a^3 = 144$

$a^3 = 2^6$　　$a = 4$ (ト)