京都教育大学2021

1 (1) nは偶数だから $n=2m$ と表すことができる (mは自然数)

このとき.

$$n(n+1)(n+2)=2m(2m+1)(2m+2)=4m(m+1)(2m+1)$$

となるが, ここで $m(m+1)$は連続した2つの自然数の積なので偶数であるから, $4m(m+1)$は8の倍数

すなわち $n(n+1)(n+2)$は8の倍数.

また. $n, n+1, n+2$ は連続した3つの自然数なので, いずれか1つは3の倍数であり. したがって.

$n(n+1)(n+2)$は3の倍数.

以上 $n(n+1)(n+2)$は 8の倍数かつ3の倍数であり 24の倍数.

以上より. 題意は示された.

(2) $n=7$のとき. $7\times8\times9=24\times21$ だから $n(n+1)(n+2)$は24の倍数.

よって nが偶数であることは $n(n+1)(n+2)$が24の倍数であるための必要条件ではない.

京都教育大学2021

2 (1) $\angle BAC = \theta$ と表す. $(0 < \theta < \pi)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{だから} \quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

証明終

(2) $\overrightarrow{AB} = (3, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}. \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot(-2)+2\cdot1+(-1)\cdot3 = -6+2-3 = -7$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{14\cdot14-(-7)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{4-1} = \mathbf{\frac{7}{2}\sqrt{3}}$$

京都教育大学2021

3 (1) ABC UNIV
ABC

UNを1固まりとして並べる　A, A, B, B, C, C, UN, I, V

$$\frac{9!}{2!2!2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 45360$$

45360通り

(2) UNIVを区別せず A, A, B, B, C, C, ○○○○ を並べる

$$\frac{10!}{2!2!2!4!} = \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 18900$$

○○○○の箇所にUNIVをこの順に並べれば題意の順列となるので 並べ方は 18900通り

4 (1) K_n の線分の数を a_n, 線分の長さを b_n とする.

$a_0 = 1,\quad a_1 = 4,\quad a_2 = 16\ ..\qquad b_0 = 1,\ b_1 = \frac{1}{3},\ b_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ b_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3,\ \cdots$

K_n 作成の手順より $a_{n+1} = 4a_n$, $b_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)b_n$ が成り立つので,

$a_n = a_0 \times 4^n = 4^n$, $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

S_0 について. 1辺の長さ1の正六角形であり. これは1辺の長さ1の正三角形6コからなるので

$S_0 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

S_1 について. S_0 から1辺の長さ b_1 の正三角形を $6 \times a_0 = 6$ コとり除いた形となっている.

$S_1 = S_0 - \frac{1}{2} \times b_1^2 \times \sin 60^\circ \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

S_2 について S_1 から1辺の長さ b_2 の正三角形を $6 \times a_1 = 24$ コとり除いた形となっている.

$S_2 = S_1 - \frac{1}{2} b_2^2 \sin 60^\circ \times 24 = \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\underset{27}{\cancel{81}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \overset{2}{\cancel{24}} = \frac{34}{27}\sqrt{3}$

(2) $n \geqq 1$ のとき

S_n について. S_n は S_{n-1} から1辺の長さ b_n の正三角形を $6 \times a_{n-1}$ コとり除いた形となっている.

$$S_n = S_{n-1} - \frac{1}{2} b_n^2 \sin 60^\circ \times 6 \times a_{n-1}$$

$$= S_{n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \times 6 \times 4^{n-1} = S_{n-1} - \frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$S_n = S_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{8}\sqrt{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{8}}}\sqrt{3} \times \frac{\cancel{4}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n \qquad (n \geqq 1)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{6}{5}\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n \qquad (n = 3.4.5 \ldots)$$

京都教育大学2021

5

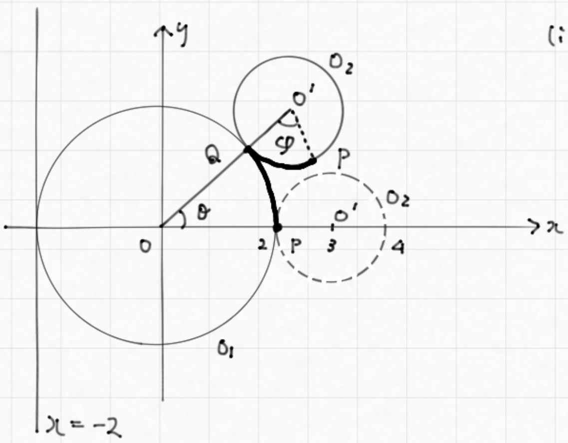
(1) 左辺 $= \cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$

$= \cos(\theta+\theta)\cos\theta - \sin(\theta+\theta)\sin\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\sin\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ 右辺

証明終

(2)



(i) 円 O_2 の中心を O'　O_1 と O_2 の接点を Q

OO' と x 軸のなす角を θ，$\angle QO'P = \varphi$ と定める。

O_2 は O_1 と接しながら、滑らずに回転するので

図中の Q と (2, 0) を結ぶ O_1 の弧と、Q と P を結ぶ O_2 の弧は同じ長さ（図中の太線部）

$$2\theta = 1\cdot\varphi$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = (2+1)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi+\varphi) \\ \sin(\theta+\pi+\varphi)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\cos\theta \\ 3\sin\theta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\cos 3\theta \\ -\sin 3\theta\end{pmatrix}$$

したがって点 P の x 座標は $3\cos\theta - \cos 3\theta$（これを $f(\theta)$ とおく）

$f(\theta) = 3\cos\theta - \cos 3\theta = 3\cos\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta = 6\cos\theta - 4\cos^3\theta$

$f'(\theta) = -6\sin\theta + 12\cos^2\theta\sin\theta = -6\sin\theta(1-2\cos^2\theta)$

$f'(\theta) = 0$ となるのは $\sin\theta = 0$，$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

のときだから、$\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

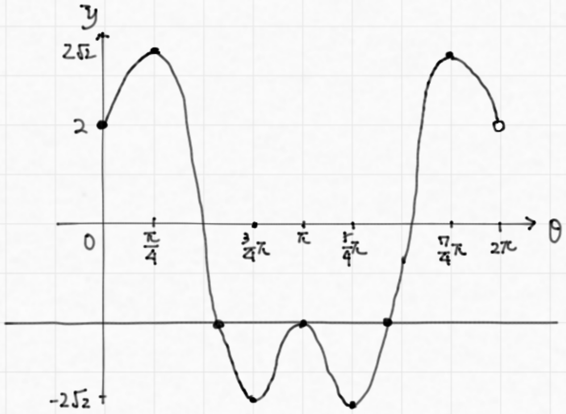
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	/
$f(\theta)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

$f(0) = f(2\pi) = 2$，$f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$　　$f(\frac{3}{4}\pi) = -2\sqrt{2}$

$f(\pi) = -2$，$f(\frac{5}{4}\pi) = -2\sqrt{2}$　　$f(\frac{7}{4}\pi) = 2\sqrt{2}$

$y = f(\theta)$ の増減は右のようになる　　よって $f(\theta)$ の範囲は $\mathbf{-2\sqrt{2} \leqq f(\theta) \leqq 2\sqrt{2}}$

(ii) $y = f(\theta)$ のグラフの概形は下のようになる



左図より

$y = f(\theta)$ と $y = -2$ との交点は3箇所。

よって P の軌跡は $x = -2$ 上に3回乗ることが分かる。