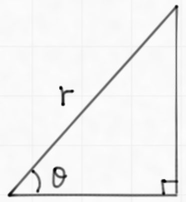
鹿児島大2021

1 (1) 解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha+\beta)\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha^2+\beta^2)}{\cancel{\alpha-\beta}}=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=-p(p^2-2q)=\mathbf{-p^3+2pq}$$

(2)



斜辺の長さをrとし、左のようにθを定める。

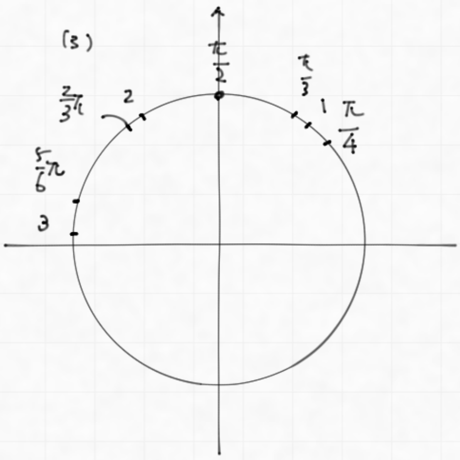
三角形の面積をSとして

$$S=\frac{1}{2}\times r\cos\theta\times r\sin\theta=\frac{1}{4}r^2\sin2\theta.$$

これが最大となるのは $\sin2\theta=1$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときで、

このとき三角形は直角二等辺三角形である。

(3)



$\pi=3.14..$ を考えて。

$$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi<\frac{5}{6}\pi<3<\pi.$$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$ より　$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\frac{1}{2}<\cos1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$ より　$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin2<1$

$\frac{5}{6}\pi<3<\pi$ より　$0<\sin3<\frac{1}{2}$

以上より

$$0<\sin3<\frac{1}{2}<\cos1<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin2<1$$

$\sin3$, $\cos1$, $\sin1$, $\sin2$.

鹿児島大2021

2 $f(x)=x^3+3(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a}+\log_{\frac{1}{8}}4)x^2-4(\log_{\frac{1}{4}}a)x-4(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a})^3$

(1) 底を $\frac{1}{4}$ に揃える

$$f(x)=x^3+3\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}a+\frac{\log_{\frac{1}{4}}4^{-1}}{\log_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}\right)x^2-4(\log_{\frac{1}{4}}a)x-4\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}a\right)^3$$

$$=x^3+\left(\frac{3}{2}b-2\right)x^2-4bx-\frac{1}{2}b^3$$

(2) $f'(x)=3x^2+(3b-4)x-4b=(3x-4)(x+b)$

$f'(x)=0$ を解くと、 $x=\boldsymbol{\frac{4}{3},\ -b}$

(3) $0<a<1$ だから　$b=\log_{\frac{1}{4}}a>0$

x	$\cdots$	$-b$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって　$-b<\frac{4}{3}$ であり $f(x)$ の増減は右のようになっている

したがって $f(x)$ は $x=-b$ で極大となり、その値が $\frac{9}{2}$ となるので

$$f(-b)=-b^3+\frac{3}{2}b^3-2b^2+4b^2-\frac{1}{2}b^3=\frac{9}{2}$$

$$2b^2=\frac{9}{2}\qquad b=\pm\frac{3}{2}$$

$b>0$ だから $b=\frac{3}{2}=\log_{\frac{1}{4}}a$　　$a=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$　　$a=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

鹿児島大2021

3

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ より　$a_n = (n+2)(n+1)b_n$ を漸化式に代入

$$(n+1)(n+3)(n+2)b_{n+1} = (n+3)(n+2)(n+1)b_n + 2$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \therefore\ b_{n+1} - b_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(2)

$$右辺 = \frac{1}{p} \times \frac{k+3 \quad - \quad (k+1)}{(k+2)(k+1)(k+3)} = \frac{1}{p} \times \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

これが左辺と等しいのは $\dfrac{2}{p} = 1$ すなわち　$p = 2$ のとき

(3) $b_1 = \dfrac{a_1}{(1+2)(1+1)} = \dfrac{1}{3}$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} + b_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right\} + \frac{a_1}{(1+2)(1+1)}$$

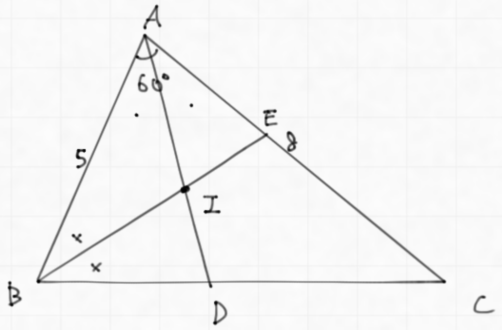
$$= \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

上で $n=1$ とすると　$b_1 = \dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{3}$ となり、$n=1$ でも上式は成り立つ

$a_n = (n+2)(n+1)b_n = \dfrac{1}{2}n(n+3)$　　　　$a_n = \dfrac{1}{2}n(n+3)$

鹿児島大2021

4



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく.

条件より, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$,

$\vec{b}\cdot\vec{c}=5\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=20$

(1) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=64-2\cdot 20+25=49$

$|\overrightarrow{BC}|=7$ BCの長さは **7**

(2) ADは∠BACを二等分するので BD : DC = AB : AC = 5 : 8.

よって $\overrightarrow{AD}=\frac{8}{8+5}\vec{b}+\frac{5}{8+5}\vec{c}=\boldsymbol{\frac{8}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{AC}}$

BEは∠ABCを二等分するので AE : EC = AB : CB = 5 : 7

よって $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{5+7}\vec{c}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}$

(3) IはAD上にある $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AD}=\frac{8}{13}k\vec{b}+\frac{5}{13}k\vec{c}$ …①

IはBE上にある. BI : IE = $s:1-s$ に内分するとして

$\overrightarrow{AI}=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AB}=\frac{5}{12}s\vec{c}+(1-s)\vec{b}$ …②

①②について. $\vec{b}$と$\vec{c}$は互いに1次独立だから.

$\frac{8}{13}k=1-s$, $\frac{5}{13}k=\frac{5}{12}s$

$k=\frac{13}{20}$, $s=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$