神戸大学 2021

1 (1) $n=2$ のとき $(2+i)^2=4+4i-1=\mathbf{3+4i}$ 虚部は 4 10で割った余りは **4**

$n=3$ のとき $(2+i)^3=(3+4i)(2+i)=\mathbf{2+11i}$ 虚部は 11 10で割った余りは **1**

$n=4$ のとき $(2+i)^4=(2+11i)(2+i)=\mathbf{-7+24i}$ 虚部は 23 10で割った余りは **4**

$n=5$ のとき $(2+i)^5=(-7+24i)(2+i)=\mathbf{-38+41i}$ 虚部は 37 10で割った余りは **1**

(2) $(2+i)^n=a_n+b_ni$ と表す.

(1)より $n=2.3.4.5$ のとき $(2+i)^n$ の実部 $a_2\sim a_5$ を 10で割った余りは 3. 2. 3. 2

よって a_n と b_n を10で割った余りは. nが偶数のときは. それぞれ 2と1.

nが奇数のときは 3と4 であると推測できる (これを命題と呼ぶ)

これを数学的帰納法で示す.

$n=1,2$ のとき

$a_1=2,\ a_2=3,\ b_1=1.\ b_2=4$ だから命題は成立する.

$n=2k-1,2k$ のとき.

$a_{2k-1}\equiv 2 \pmod{10}$ 以下合同式は全て10を法とするものとする

$a_{2k}\equiv 3.\quad b_{2k-1}\equiv 1.\ b_{2k}\equiv 4$ が成り立つと仮定する.

このとき

$$(2+i)^{2k+1}=(2+i)^{2k}(2+i)=(a_{2k}+b_{2k}i)(2+i)$$

$$=2a_{2k}-b_{2k}+(a_{2k}+2b_{2k})i$$

より $a_{2k+1}=2a_{2k}-b_{2k}\equiv 2\cdot 3-4\equiv 2$

$b_{2k+1}=a_{2k}+2b_{2k}\equiv 3+2\cdot 4\equiv 11\equiv 1$

同様に $a_{2k+2}=2a_{2k+1}-b_{2k+1}\equiv 2\cdot 2-1\equiv 3$

$b_{2k+2}=a_{2k+1}+2b_{2k}\equiv 2+2\cdot 1\equiv 4$

よって $n=2k-1,2k$ のとき. 命題が成り立てば. $2k+1$ と $2k+2$ のときも成り立つ.

以上より 命題が全てのnについて成り立つことが示された.

これは $(2+i)^n$ が. nの値にかかわらず虚部を持つ. すなわち. 虚数であることを示している.

神戸大学 2021

2

(1) $x = \cos\theta$ とおく.

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\theta \sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{8}(0-0) = \frac{1}{16}\pi$$

(2) $x^2+1 = X$ とおく.

$$\frac{dX}{dx} = 2x \ , \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline X & 1 & \to & 2 \end{array}$$

$$J = \int_0^1 x^3 \log X\, dx = \int_1^2 x^{\overset{2}{\cancel{3}}} \log X \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}\, dX = \frac{1}{2}\int_1^2 (X-1)\log X\, dX$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 X\log X - \log X\, dX = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}X^2\log X\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2}\cancel{X^2}\cdot\frac{1}{\cancel{X}}\, dx - \frac{1}{2}\left[X\log X - X\right]_1^2$$

$$= \cancel{\log 2} - 0 - \frac{1}{4}\left[\frac{X^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left(\cancel{2\log 2} - 2 - 0 + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

神戸大学 2021

3

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = x^2+y^2$

$|\vec{a}+3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = x^2+9y^2$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|\cos\theta$

$x^2+3y^2 = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}\cos\theta$

$x^4+6x^2y^2+9y^4 = (x^2+y^2)(x^2+9y^2)\cos^2\theta$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{x^4+6x^2y^2+9y^4}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)} = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}$$

(2) (1) の結果より 分母および分子を x^4 で割る

$$\sin^2\theta = \frac{4\cdot\frac{y^2}{x^2}}{(1+\frac{y^2}{x^2})(1+9\frac{y^2}{x^2})}$$

$\frac{y^2}{x^2} = t$ とおく $(t>0 \because x \neq y \neq 0)$

$$\sin^2\theta = \frac{4t}{(1+t)(1+9t)} = f(t) \text{ とおく}$$

$$f'(t) = \frac{4(1+t)(1+9t)-4t(18t+10)}{(1+t)^2(1+9t)^2} = \frac{-4(9t^2-1)}{(1+t)^2(1+9t)^2}$$

$t>0$ において $f'(t)=0$ となるのは $t=\frac{1}{3}$ のときのみで

$f(t)$ の増減は右のようになる.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

また $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{4t}{(1+t)(1+9t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{4}{(\frac{1}{t}+1)(1+9t)} = 0$

$f(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\times 4} = \frac{1}{4}$, $f(0)=0$

よって $t=\frac{1}{3}=\frac{y^2}{x^2}$ つまり $y^2=3x^2$ のとき $f(t)$ は最大となり. その値は $\frac{1}{4}$.

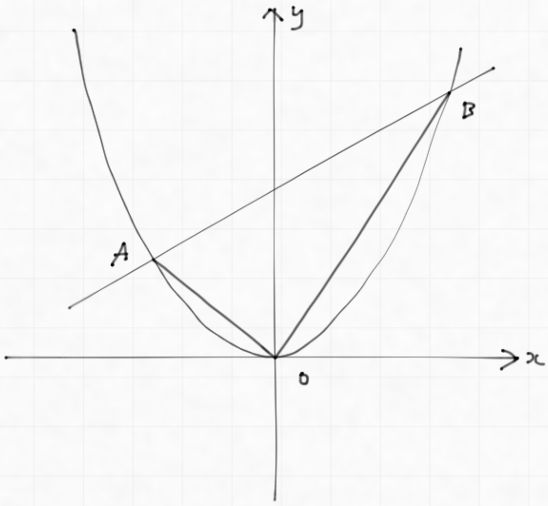
$x>0, y>0$ だから $y=\sqrt{3}x$ のとき $\sin\theta$ は最大値 $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ をとる.

(1) より $\cos\theta = \frac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}} > 0$ であり. これから $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であることが分かる.

$0<\sin\theta \leqq \frac{1}{2}$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\theta \leqq \frac{\pi}{6}$

θ の最大値は $\frac{\pi}{6}$. (このとき $y=\sqrt{3}x$)

神戸大学 2021



4

(1) AとBについて そのx座標を a, b とおく

($a<b$として一般性を失わないので $a<b$とする)

A, Bは $y=x^2$ と $y=mx+1$ の交点だから

$$x^2-mx-1=0$$

の解である。

解と係数の関係より

$$a+b=m,\quad ab=-1 \quad \cdots ①$$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=(a, a^2)\cdot(b, b^2)=ab+a^2b^2=-1+(-1)^2=0 \quad (\because ①)$$

よって $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$

(2) (1)より $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ だから ABは$\triangle ABO$の直径。よって外接円の中心は ABの中点

$$\frac{a+b}{2}=\frac{m}{2},\quad \frac{a^2+b^2}{2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{2}=\frac{m^2+2}{2}$$

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{a^2+a^4+b^2+b^4}=\sqrt{m^2+2+(m^2+2)^2-2a^2b^2}=\sqrt{m^4+5m^2+4}$$

$$\text{円の半径}=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^4+5m^2+4}$$

円の式は $\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m^2+2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(m^2+1)(m^2+4)$

(3) (2)の円の式と $y=x^2$を連立

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{m^2+2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(m^2+1)(m^2+4)$$

$$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0$$

$$x\left(x^3-(m^2+1)x-m\right)=0$$

$$x(x^2-mx-1)(x+m)=0 \quad \cdots ①$$

$x^2-mx-1=0$ の解は aとb だから ①が $0, a, b$ 以外の解をもつのは

$m=0, -a, -b$ のとき

$m=0$ のとき ①は $x=0, a, b$ の3つの解をもち

$m=-a$ 〃 $x^2+ax-1=0$ が $x=a$を解にもつことになり $a^2+a^2-1=0$ $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore m=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$m=-b$ 〃 $x^2+bx-1=0$ が $x=b$を解にもつことになり $b^2+b^2-1=0$ $b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore m=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

以上より ①が $0, a, b$ の3つのみを解にもつのは $m=0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

神戸大学 2021

5

(1)
$$OP^2 = x^2 + y^2 = \frac{(4+5\cos t)^2}{(5+4\cos t)^2} + \frac{(3\sin t)^2}{(5+4\cos t)^2}$$
$$= \frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2} = \frac{25+40\cos t+16\cos^2 t}{(5+4\cos t)^2} = \frac{(5+4\cos t)^2}{(5+4\cos t)^2} = 1$$

$\therefore\ OP = 1$

(2)
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)\times(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2} = \frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2} = \frac{12+15\cos t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \frac{12+15\cos t}{(5+4\cos t)^2}\right)$$

$$|\vec{v}|^2 = \frac{81\sin^2 t+144+360\cos t+225\cos^2 t}{(5+4\cos t)^4} = \frac{144\cos^2 t+360\cos t+225}{(5+4\cos t)^4} = \frac{(12\cos t+15)^2}{(5+4\cos t)^4} = \frac{9}{(5+4\cos t)^2}$$

$$|\vec{v}| = \frac{3}{5+4\cos t}$$

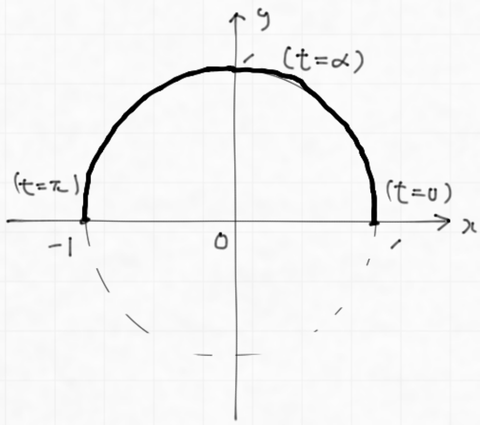
(3) $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で考える

$\frac{dx}{dt} = 0$ となるのは $\sin t = 0$ 　 $t = 0,\ \pi$

$\frac{dy}{dt} = 0$ となるのは $\cos t = -\frac{4}{5}$ 　このときの t を α とする

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x	1	$\leftarrow$		$\leftarrow$	-1
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

Pの軌跡は右のようになる



$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ のとき $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 　$(\because\ 0 \leqq \alpha \leqq \pi)$

このとき 　$y = \frac{3\sin\alpha}{5+4\cos\alpha} = \frac{\frac{9}{5}}{5-\frac{16}{5}} = 1$

(1)より $OP = 1$ だから Pは単位円の $y \geqq 0$ の範囲を描く

よって
$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} |\vec{v}|\,dt = \frac{1}{3}\times\pi = \frac{\pi}{3}$$