名古屋市立大学 2022

1 (1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\cdot\log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}} - (1-\log x)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	+	0	−		−
$f''(x)$	/	−		−	0	+
$f(x)$	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↘

$f'(x)=0$ となるのは $x=e$　$f''(x)=0$ となるのは $x=e^{\frac{3}{2}}$

$f(e)=\frac{1}{e}$，$f(e^{\frac{3}{2}}) = \dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$

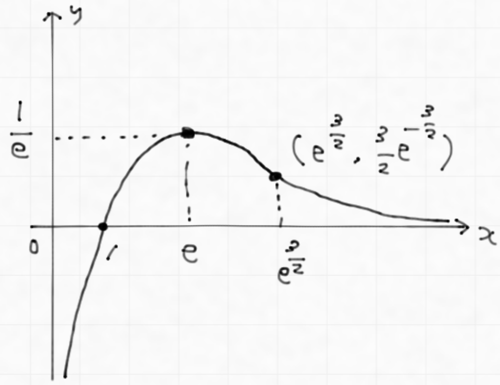
$f(x)$ の**増減**および凹凸は右のとおり。

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$x=e$ のとき 極大値 $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

変曲点は $\boldsymbol{\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

グラフの**概形は右のとおり**



(2) (1) のグラフより $x_1 > x_2 > e$ を満たす

実数 x_1, x_2 について $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ。

よって $m>e$ のとき，$f(m)>f(n) \Leftrightarrow \dfrac{\log m}{m} > \dfrac{\log n}{n} \Leftrightarrow \log m^n > \log n^m \Leftrightarrow m^n > n^m$

したがって $m \leqq e$ のときを考える。(m は 1 または 2)

$m=1$ のとき，$1^n = n^1$ を満たす n は 1 のみで，このとき $m=n=1$ となり $m<n$ に反する

$m=2$ のとき $2^n = n^2$ を満たす n は 2 または 4 で，これは (1) のグラフで

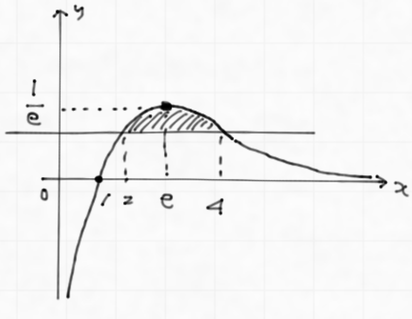
$y=f(x)$ と $y=f(2)$ のグラフの交点が 2 つしかないことから分かる。 $m<n$ だから $n=4$

以上より，$m^n = n^m$，$m<n$ を満たす自然数 m, n は $(m, n) = \boldsymbol{(2, 4)}$ のみ

(3) (2) で述べたように $f(x) = f(2)$ を満たす x は 2 および 4.

したがって，もとめる図形は右グラフ斜線部分.

その面積を S とすると，



$$S = \int_2^4 \frac{\log x}{x}\,dx - \frac{\log 2}{2}\times(4-2)$$

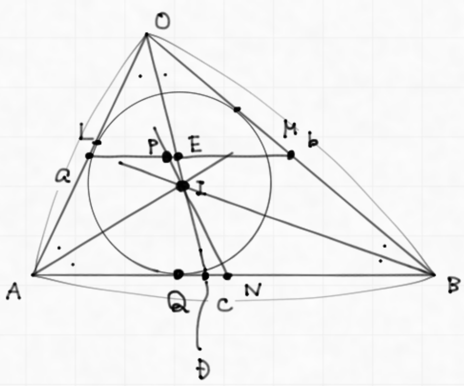
$$= \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_2^4 - \log 2$$

$$= 2(\log 2)^2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \log 2$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}(\log 2)^2 - \log 2}$$

名古屋市立大学2022

2



(1) OIとABの交点をDとする.

OIは∠AOBを二等分するので.

$AD : DB = OA : OB = a : b$

AIは∠OADを二等分するので.

$OI : ID = AO : AD = a : c \times \dfrac{a}{a+b}$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{OI}{OD} \times \overrightarrow{OD} = \frac{a}{a + \frac{ac}{a+b}} \times \left(\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OB} \right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB} \right)}$$

(2) OIとLMの交点をEとする

L.MはOA, OBの中点だから中点連結定理より. $LM \parallel AB$. $LM = \frac{1}{2}AB$ で、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{b}{2(a+b)}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{2(a+b)}\overrightarrow{OB}$$

$$EI : ID = \left|\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OE}\right| : \left|\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI}\right| = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{2(a+b)} : \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b+c}$$

$$= a+b-c : 2c$$

$\triangle IPE \backsim \triangle IND$ だから $PI : NI = EI : DI = a+b-c : 2c$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ON} + \frac{NI+PI}{NI}\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{ON} + \frac{a+b+c}{2c}(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{ON})$$

$$= \frac{c-a-b}{2c}\overrightarrow{ON} + \frac{\cancel{a+b+c}}{2c} \times \frac{1}{\cancel{a+b+c}}(b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{c-a-b}{4c}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2c}(b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB})$$

$$= \boldsymbol{\frac{c+b-a}{4c}\overrightarrow{OA} + \frac{c+a-b}{4c}\overrightarrow{OB}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c+b-a}{2c}\overrightarrow{OA} + \frac{c+a-b}{2c}\overrightarrow{OB} \right)$$

よってOPの延長とABの交点をFとして $\overrightarrow{OF} = \dfrac{c+b-a}{2c}\overrightarrow{OA} + \dfrac{c+a-b}{2c}\overrightarrow{OB}$

$AF : FB = c+a-b : c+b-a$ であり.

$$AF = c \times \frac{AF}{AF+FB} = c \times \frac{c+a-b}{2c} = \frac{a+c-b}{2}$$

Qは内接円CとABの接点だから

$$AQ = \frac{OA+AB-OB}{2} = \frac{a+c-b}{2}$$

よって $AF = AQ$ であり. FとQは同じ点であり. これは O. P. Q が一直線上にあることを示している.

名古屋市立大学2022

3

表	裏	進む数	終点	通り数
10	0	20	A	${}_{10}C_{10} = 1$
9	1	19	B	${}_{10}C_9 = 10$
8	2	18	C	${}_{10}C_8 = 45$
7	3	17	D	${}_{10}C_7 = 120$
6	4	16	A	${}_{10}C_6 = 210$
5	5	15	B	${}_{10}C_5 = 252$
4	6	14	C	${}_{10}C_4 = 210$
3	7	13	D	${}_{10}C_3 = 120$
2	8	12	A	${}_{10}C_2 = 45$
1	9	11	B	${}_{10}C_1 = 10$
0	10	10	C	${}_{10}C_0 = 1$

(1) Aにある確率 $\dfrac{1+210+45}{2^{10}} = \dfrac{1}{4}$

Bにある確率 $\dfrac{10+252+10}{2^{10}} = \dfrac{17}{64}$

Cにある確率 $\dfrac{45+210+1}{2^{10}} = \dfrac{1}{4}$

Dにある確率 $\dfrac{120+120}{2^{10}} = \dfrac{15}{64}$

(2) QがBに戻るのはPがAに戻るのと同等 $\dfrac{1}{4}$

QがCに進むのはPがDに進むのと同等 $\dfrac{15}{64}$

QがD 〃 PがC 〃 $\dfrac{1}{4}$

QがA 〃 PがB 〃 $\dfrac{17}{64}$

PがAにすすむ　PがBにすすむ　PがCにすすむ　PがDにすすむ

$$\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{17}{64}\right)+\frac{17}{64}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{15}{64}\right)+\frac{15}{64}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4\cdot 64}(47+51+49+45)=\frac{\cancel{192}^{\cancel{48}\ 6}}{\cancel{4\cdot 64}_{8}}=\frac{3}{4}$$

名古屋市立大学2022

(1) 第k群の末項は $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(l+2^{l-1}) = \frac{1}{2}k(k+1)+1\times\frac{2^k-1}{2-1} = \frac{1}{2}k(k+1)+2^k-1$ 項目

$500 \leqq \frac{1}{2}k(k+1)+2^k-1$ を満たす最小のkは　$k=8$のとき $36+2^8-1=291$　$k=9$のとき $45+512-1=556$

だから $k=9$.

つまり a_{500}は第9群に属しており　$a_{500} = 2^{-9+1} = \frac{1}{256}$

(2) $S_k = 2^{-k+1} \times (k+2^{k-1}) = k\cdot 2^{-k+1}+1$

$$\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{-i+1} = 1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^{-1} + 3\cdot 2^{-2} + 4\cdot 2^{-3} + \cdots + k\cdot 2^{-k+1}$$

$$-)\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{-i+1} = 1\cdot 2^{-1} + 2\cdot 2^{-2} + 3\cdot 2^{-3} + \cdots + (k-1)2^{-k+1} + k\cdot 2^{-k}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{-i+1} = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-k+1} - k\cdot 2^{-k}$$

$$= 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} - k\cdot 2^{-k}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{-i+1} = 4-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

よって $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} S_i = 4-(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+k$

(3) 第10群末項は　$55+2^{10}-1 = 1078 < 2022$

第11群末項は　$66+2^{11}-1 > 2022$

$$\sum_{i=1}^{10} S_i + (2022-1078)\times 2^{-11+1}$$

$$= 4+10-12\times\left(\frac{1}{2}\right)^9 + 944\times 2^{-10}$$

$$= 14-\frac{3}{2^7}+\frac{59}{2^6} = \frac{14\times 2^7-3+118}{2^7} = \frac{1907}{128}$$