順天堂大2021

1 (1) (i) $z_1 = \frac{3}{2} + 2i$, $z_2 = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$

$|z_1| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

$z_1 = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = \frac{5}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\sin\alpha = \mathbf{\frac{4}{5}}$

(ii) $z_3 = z_2 \div \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right) = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{9}{5}i}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i} = \dfrac{3+9i}{3+4i} \times \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{45 + 15i}{25} = \mathbf{\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i}$

(iii) $z_4 = z_2 i = \mathbf{-\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i}$

(iv) z_3とz_4の 1:2の内分点は $z_3 \times \frac{2}{3} + z_4 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i$

外分点は $z_3 \times \frac{2}{-1+2} + z_4 \times \frac{-1}{-1+2} = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{9}{5} - \frac{3}{5}i = \frac{27}{5} + \frac{3}{5}i$

両者の中点は $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}i + \frac{27}{5} + \frac{3}{5}i\right) = \mathbf{3 + \frac{3}{5}i}$ … 中心

両者の距離は $\left|\frac{27}{5} + \frac{3}{5}i - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}i\right)\right| = \frac{24}{5}$ 半径は $\mathbf{\frac{12}{5}}$

(2) (i) $\int_0^a x^3 - a^2 x \, dx$ について

$x = at$ とおく. $\frac{dx}{dt} = a$.

x	$0 \to a$
t	$0 \to 1$

$\int_0^a x^3 - a^2 x \, dx = \int_0^1 (a^3 t^3 - a^2 \cdot at) \, a \, dt = a^4 \int_0^1 t^3 - t \, dt = a^4 \int_0^1 x^3 - x \, dx$

$= a^4 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{4}a^4 = pa^q$

$p = \mathbf{-\frac{1}{4}}$, $q = \mathbf{4}$ $\left|-\frac{1}{4}a^4\right| = 4 \iff a^4 = 16$ $a = \mathbf{2}$ $(\because a \geqq 0)$

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0$ を解くと $x = 2$ $f(2) = 8 - 24 + 20 + 1 = 5$

変曲点は $(\mathbf{2, 5})$

直線を $y = m(x-2) + 5$ とおく. $y = f(x)$ と連立して

$mx - 2m + 5 = x^3 - 6x^2 + 10x + 1 \iff (x-2)(x^2 - 4x + 2 - m) = 0$

$x = 2,\ 2 \pm \sqrt{2+m}$ x座標が最も大きいのは $2 + \sqrt{2+m}$

面積が8だから $x - 2 = t$. $\sqrt{2+m} = \alpha$ として

$\int_2^{2+\sqrt{2+m}} mx - 2m + 5 - (x^3 - 6x^2 + 10x + 1) \, dx = \int_0^{\alpha} -t(t+\alpha)(t-\alpha) \, dt$

$= \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2\right]_0^{\alpha} = -\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^4 = \frac{1}{4}\alpha^4 = \frac{1}{4}(2+m)^2 = 4$ $2 + m = \pm 4$ $m = 2$

$(\because m > -2)$

交点のx座標は $2 + \sqrt{2+2} = \mathbf{4}$.

直線は $y = 2(x-2) + 5 = \mathbf{2x + 1}$

(3) (i)

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} k^2 = \cancel{\frac{1}{2n+1}} \times \frac{1}{6}n(n+1)\cancel{(2n+1)} \times 2 = \frac{1}{3}n(n+1)$$

平均は 0 だから　分散は　$\frac{1}{3}n(n+1) = \frac{56}{3}$　$\therefore n = 7$

(ii) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \times 3 \\ \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} - 1^2 = \dfrac{26}{3} \end{cases}$　　$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 29$

$29 = 4^2 + 3^2 + 2^2$ or $5^2 + 2^2 + 0^2$

$a_1 < a_2 < a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ を満たすのは

$(a_1, a_2, a_3) = (-3, 2, 4), (-2, 0, 5)$　　$a_3 = 4, 5$

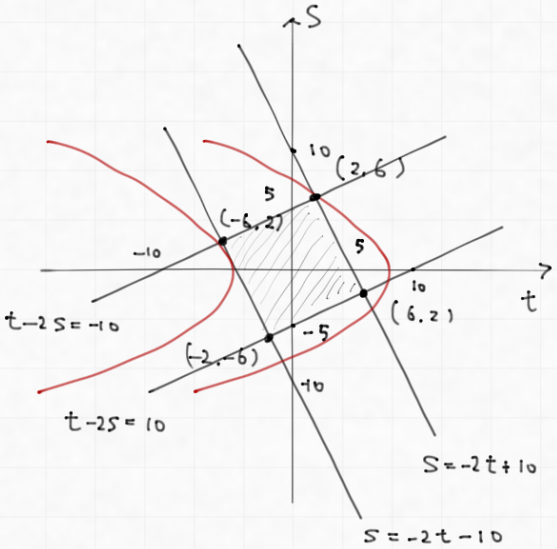
(iii) $(a_1, a_2, a_3) = (-2, 0, 5)$

和は $0 - (-2 + 0 + 5) = -3$　　$-3 \div (15-3) = -\frac{1}{4}$ … 平均.

2乗平均 $= \left\{\frac{1}{6} \times 7 \times 8 \times 11 \times 2 - \left((-2)^2 + 0^2 + 5^2\right)\right\} \times \frac{1}{15-3} = \frac{280 - 29}{12} = \frac{251}{12}$

分散 $= \frac{251}{12} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1004}{48} - \frac{3}{48} = \frac{1001}{48}$

(4)



(i) $2x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1$

$= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{9}{8}$

$x = -\frac{3}{4}$, $y = 1$ のとき 最小　$-\frac{9}{8}$

$x = 2$　$y = -2$ のとき 最大　$8 + 4 + 6 + 4 + 1 = 23$

(ii) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y + 1$

$= (x - 2y)^2 + 2x + y + 1$ … ①

$x - 2y = s$, $2x + y = t$ とすると ① は $s^2 + t + 1$

また　$s + 2t = 5x$ より　$-10 \leqq s + 2t \leqq 10$

$2s - t = -5y$ より　$-10 \leqq t - 2s \leqq 10$

$s^2 + t + 1 = k$ とすると　$t = -s^2 + k - 1$ …②

$(t, s) = (2, 6)$ のとき.　$k = 39$

$(t, s) = (6, 2)$ 〃　$k = 11$

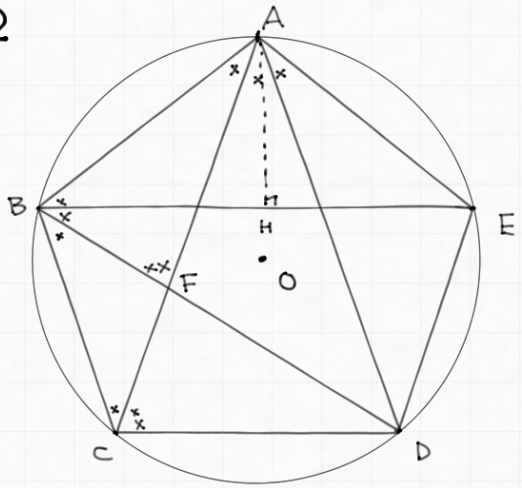
$(t, s) = (-6, -2)$ 〃　$k = 4 - 6 + 1 = -1$

② と $s = -2t - 10$ が接するのは.

$\frac{dt}{ds} = -2s$　　$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2s} = -2$ のとき $s = \frac{1}{4}$　このとき $t = -\frac{41}{8}$　$k = \frac{1}{16} - \frac{41}{8} + 1 = -\frac{65}{16}$

① の最大値は 39　最小値は $-\frac{65}{16}$

2



図のようにFを定める

正五角形の1つの内角は $\frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$

図中の × 印は1つ36°

AC = x とすると AB = AF = 1 だから BF = CF = $x-1$

△ABC ∽ △BFC なので.

$$AB : AC = BF : BC$$

$$1 : x = x-1 : 1$$

$$x^2 - x = 1 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ だから $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

図中HはAからBEに下ろした垂線の足.

$$\cos\angle BAC = \cos 36^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

よって $\sin^2\angle BAC = 1 - \cos^2\angle BAC = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

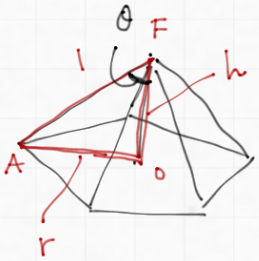
正弦定理 $2r = \frac{BC}{\sin 36^\circ}$ $\quad r = \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$ $\quad r^2 = \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}(5-\sqrt{5})} = \frac{\cancel{2}(5+\sqrt{5})}{\cancel{20}\,10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$$S = \frac{1}{\cancel{2}} \times 1 \times x \times \sin 36^\circ \times \cancel{2} + \frac{1}{2} \times x^2 \times \sin 36^\circ$$

$$S^2 = \left(x \cdot \sin 36^\circ + \frac{1}{2}x^2 \sin 36^\circ\right)^2 = \sin^2 36^\circ\, x^2 \left(1 + x + \frac{1}{4}x^2\right) = \sin^2 36\, \sin^2 36^\circ \times \frac{5}{4}x^4$$

$$= \frac{5(5-\sqrt{5})}{32} \times (1+x)^2 = \frac{5(5-\sqrt{5})}{32}(x^2+2x+1) = \frac{5(5-\sqrt{5})}{32} \times (2+3x)$$

$$= \frac{5(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{32 \times 2} = \frac{5(35-15+8\sqrt{5})}{64} = \frac{5(5+2\sqrt{5})}{16} = \frac{25+10\sqrt{5}}{16}$$

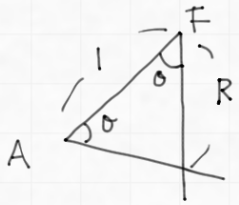


(2)

左図より $1 = h^2 + r^2$ $\quad h^2 = 1 - r^2 = 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

$$\sin\theta = \frac{r}{1}, \quad \cos\theta = \frac{h}{1}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos h = 2rh = 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{5}\sqrt{25-5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



左図より. $R\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad R = \frac{1}{2\cos\theta} = \frac{1}{2h}$

$$R^2 = \frac{1}{4h^2} = \frac{10}{4(5-\sqrt{5})} = \frac{\cancel{10}(5+\sqrt{5})}{4 \times \cancel{20}\,2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

3

(1) $945-378=567=7\times 3^4$ だから $n_3(945-378)=4$

$d_3(945,378)=3^{-n_3(945-378)}=3^{-4}=\frac{1}{81}$

(2) $d_p(x,0)=p^{-n_p(x-0)}=p^{-n_p(x)}$

$d_p(mx,0)=p^{-n_p(mx-0)}=p^{-n_p(mx)}$

$x=0$ のとき題意の不等式が成り立つのは明らか. $x\neq 0$ のとき.

x は $p^{n_p(x)}$ で割り切れ. m は $p^{n_p(m)}$ で割り切れるので.

mx は $p^{n_p(x)+n_p(m)}$ で割り切れる.

すなわち $n_p(mx)=n_p(m)+n_p(x)$.

$n_p(m)\geqq 0$ だから $n_p(mx)\geqq n_p(x)$

したがって $p^{-n_p(x)}\geqq p^{-n_p(mx)}$ であり.

$d_p(x,0)\geqq d_p(mx,0)$ が成り立つ.

(3) $x=y$ または $y=z$ または $z=x$ が成り立つとき. 不等式が成り立つのは明らか.

等号が成立しないとき.

$n_p(x-y)=a$. $n_p(y-z)=b$. $n_p(z-x)=c$ と表すと. (a,b,c は負でない整数)

$x-y=p^aA$, $y-z=p^bB$, $z-x=p^cC$ と表すことができる (A,B,C は整数)

このとき. $d_p(x,z)=p^{-c}$, $d_p(x,y)=p^{-a}$. $d_p(y,z)=p^{-b}$ であり.

$d_p(x,y)+d_p(y,z)=p^{-a}+p^{-b}$

ここで $z-x=p^cC$ に $z=y-p^bB$. $x=p^aA+y$ を代入すると.

$p^aA-p^bB=p^cC$

であるが. $a\geqq b$ のとき $p^aA-p^bB=p^b(p^{a-b}A-B)$

となるので. $b\leqq c$

よって $p^{-c}\leqq p^{-b}\leqq p^{-b}+p^{-a}$ が成立し. これより $d_p(x,z)\leqq d_p(x,y)+d_p(y,z)$

$a<b$ のときも同様.

以上より $d_p(x,z)\leqq d_p(x,y)+d_p(y,z)$ が成り立つことが示された.