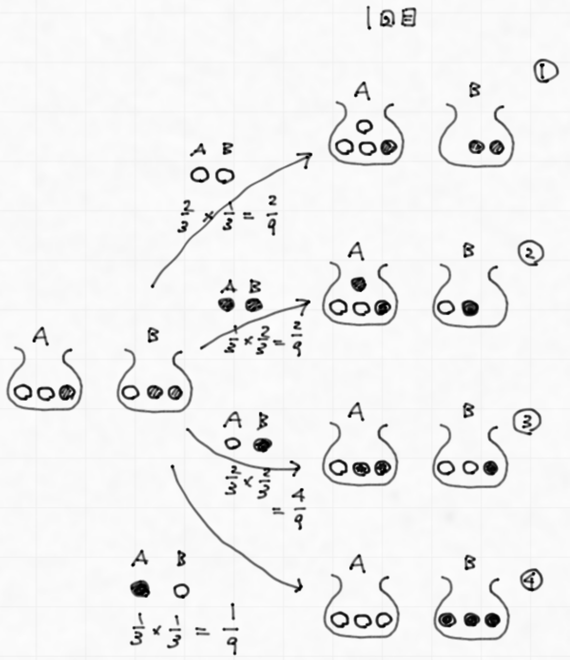
東京慈恵会医大2022

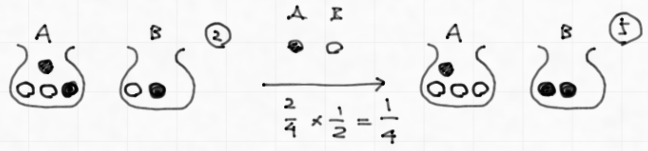
1



2回目でAに赤玉1つ

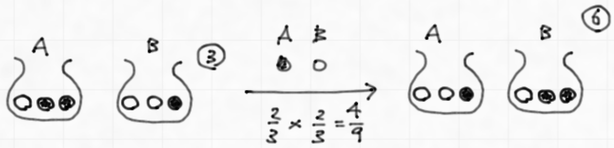
①のとき、Aが白、赤のいずれをとりだしても Aの赤玉は増えるので、2回目で赤玉1つとはならない。

②のとき、A, Bから白玉をとりだしたとき、Aの赤玉は1つとなる



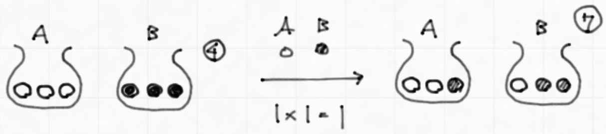
$$\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$$

③のとき Aから赤、Bから白をとりだしたとき、Aの赤玉は1つとなる



$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$

④のとき、Aからは必ず白玉、Bからは赤玉がとり出され、Aの赤玉は1つとなる



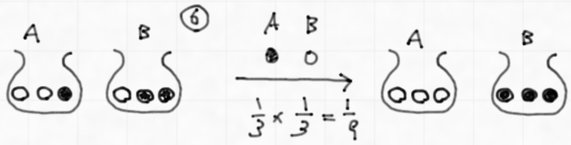
$$\frac{1}{9}\times1=\frac{1}{9}$$

以上より、$\frac{1}{18}+\frac{16}{81}+\frac{1}{9}=\frac{9+32+18}{162}=\mathbf{\frac{59}{162}}$

3回の後、Aの赤玉が0となるのは、

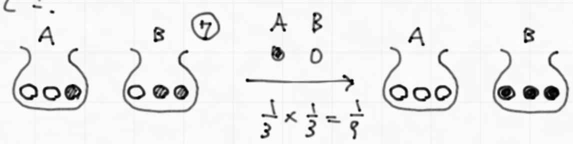
⑤のとき　Aから赤、白、いずれをとりだしても Aの赤玉が0になることはない

⑥のとき、



$$\frac{16}{81}\times\frac{1}{9}=\frac{16}{729}$$

⑦のとき、



$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$$

以上より、$\frac{16}{729}+\frac{1}{81}=\mathbf{\frac{25}{729}}$

2

(1) $$\lim_{x\to -a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to -a+0}\frac{\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}-0}{x+a}=\lim_{x\to -a+0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\lim_{x\to -a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to -a-0}\frac{\frac{-x-a}{\sqrt{x^2+1}}-0}{x+a}=\lim_{x\to -a-0}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

よって $f(x)$ は $x-a$ で微分可能ではない.

(2) $x>-a$ のとき　$f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+a)\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{2}x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-ax}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{a}$ のとき.

$x<-a$ のとき. $f(x)=-\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'(x)=\frac{-1+ax}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$x<-a$ では $f(x)=0$ とはならない.

以上より. $f(x)$ の増減は次のようになる

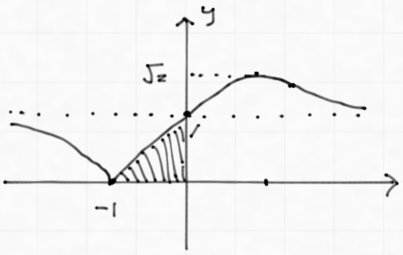
x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	/	$+$		$-$
$f(x)$	↘	0	↗		↘

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\left|\frac{1}{a}+a\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}}=\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{1+a^2}$$

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+a}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-1+\frac{a}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1<\sqrt{2}$$

よって最大値が $\sqrt{2}$ となるのは　$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{2}$　$a=1$

(3)



$a=1$ のとき.　$f(x)=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}$

$$V=\int_{-1}^{0}\pi\{f(x)\}^2dx=\pi\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{0}1+\frac{2x}{x^2+1}dx=\pi\left[x+\log|x^2+1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=\pi(0+0)-\pi(-1+\log 2)=\pi(1-\log 2)$$

3

(1) $k \geqq 5$のとき、(i)(ii)を満たす mが存在すると仮定する。

mは3以上の奇数だから、その約数は全て奇数。

したがって $a_j - a_i$ は必ず偶数で、0または2。

$k \geqq 5$のとき、$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_k$ について、

$$a_3 - a_2 = 2, \quad a_4 - a_3 = 2$$

が成り立ち、a_2, a_3, a_4 は連続した奇数で $a_4 - a_2 = 4$ となるが、

これは条件(ii)を満たさない。

よって$k < 5$であり、合成数の約数は少なくとも3つ以上あるので $k = 3$ または4

mの正の約数について、

$$a_1 \times a_k = m, \quad a_2 \times a_{k-1} = m, \quad \ldots$$

というように約数のペアを考えると、mが平方数でないとき、約数の個数は偶数個になる。

したがって

$k = 3$のとき、mは平方数で、$a_2 = \sqrt{m}$ となる。　よって $m = a_2^2$

$k = 4$のとき、$a_1 = 1$, $a_4 = m$, $a_2 \times a_3 = m$, $a_3 - a_2 = 2$ より

$$m = a_2 \times (2 + a_2)$$

よって $m =$ **a_2^2 または $2a_2 + a_2^2$**

(3) $k = 3$のとき、$m = a_2^2$

$$(a_2 n + 1)^{a_2} - 1 = \sum_{k=0}^{a_2} \underbrace{{}_{a_2}C_k (a_2 n)^k}_{} - 1 \quad \cdots ①$$

〜〜部について、$k \geqq 2$のとき a_2^2 を因数にもつので

$$① \equiv {}_{a_2}C_1 (a_2 n) + {}_{a_2}C_0 (a_2 n)^0 - 1 \pmod{a_2^2}$$

$$\equiv a_2^2 n + 1 - 1 \pmod{a_2^2}$$

$$\equiv 0 \pmod{a_2^2}$$

よって①は a_2^2 すなわちmの倍数である

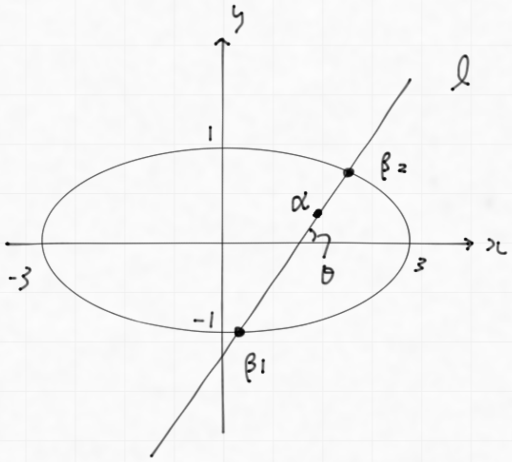
4

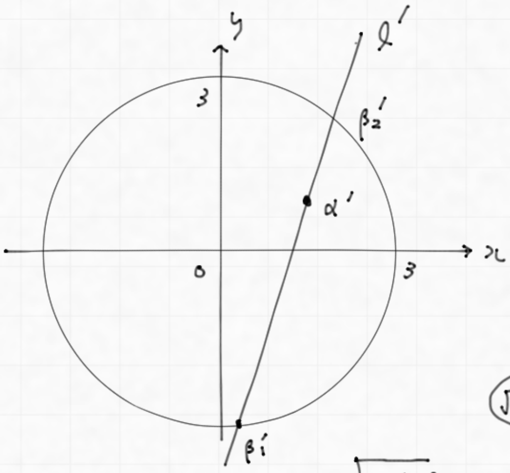
(1) $|z|=1$ だから $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける. $(0\leqq\theta<2\pi)$

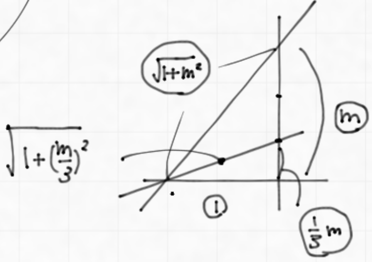
$$w=u+vi=\cos\theta+i\sin\theta+2(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$u=3\cos\theta,\quad v=-\sin\theta$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入 $\left(\frac{u}{3}\right)^2+(-v)^2=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{u^2}{9}+v^2=1}$







(2) Cは左上図のだ円.

これをy軸方向に3倍に拡大すると左下図の円に移される. これをC', 直線をl', 各点を$\alpha', \beta_1', \beta_2'$などとする.

このとき $|\beta_1'-\alpha'|\cdot|\beta_2'-\alpha'|$ は方べきの定理より一定値をとることがわかる. この値を X とする.

l'がx軸と垂直なとき.

$$|\beta_1-\alpha|=\frac{1}{3}|\beta_1'-\alpha'|,\quad |\beta_2-\alpha|=\frac{1}{3}|\beta_2'-\alpha'|$$

が成り立つので

$$|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|=\frac{1}{9}X$$

l'がx軸と垂直でないとき.

l'の傾きをmとするとlの傾きは$\frac{1}{3}m$

そのため左図のような長さの比が生じ

$$|\beta_1-\alpha|=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{m}{3}\right)^2}}{\sqrt{1+m^2}}\times|\beta_1'-\alpha'|$$

$$|\beta_2-\alpha|=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{m}{3}\right)^2}}{\sqrt{1+m^2}}\times|\beta_2'-\alpha'|$$

よって $|\beta_1-\alpha||\beta_2-\alpha|=\dfrac{\frac{1}{9}m^2+1}{m^2+1}X$

$$=\left(\frac{1}{9}+\frac{\frac{8}{9}}{m^2+1}\right)X \quad \cdots ①$$

①は $m=0$ のとき最大となり, 最大値は X

このときlの傾きも0

よって $|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ が最大となるのは l が

αを通て傾き0の直線となるときである