大阪歯科大学2020推薦

I

(1) $\sin\theta = 1-2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$ $\quad \sin\theta = \mathbf{\frac{1}{2}}$ $\quad (\because\ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

(2) $P(x) = ax^2+bx+c$

$P(0) = c = 3$

$P(1) = a+b+c = 1$

$P(-1) = a-b+c = 7$

$c=3,\quad a=1,\quad b=-3$

$P(x) = x^2-3x+3$

$P(2) = 4-6+3 = \mathbf{1}$

(3) $\begin{cases} r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0.6 \\ \dfrac{s_{xy}}{s_x^2 \cdot s_y^2} = 1.2 \end{cases}$

これらを連立

$s_x s_y = \frac{1}{2} \qquad s_{xy} = \mathbf{0.3}$

大阪歯科大学2020推薦

Ⅱ (1) $1.01^{100} = (1+0.01)^{100} = {}_{100}C_0\,1^{100} + {}_{100}C_1\,1^{99}\times 0.01^{1} + {}_{100}C_2\cdot 1^{98}\times 0.01^{2} + \cdots$

$= 1 + 100\times 0.01 + \frac{100\times 99}{2}\times 0.01^{2} + \cdots$

$\geqq 1 + 1 = 2$　　証明終

(2) (i) $n=1$ のとき

左辺 $= 2^1 = 2$　　右辺 $= 2\cdot 1 = 2$　　$n=1$ のとき成立する

(ii) $n=k$ のとき．

$2^k \geqq 2k$ が成り立つと仮定する

$2^{k+1} - 2(k+1) = 2^{k+1} - 2k - 2$

$\geqq 2k\cdot 2 - 2k - 2$　　($\because$ 仮定)

$= 2(k-1) \geqq 0$

$n=k$ で成り立てば $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii) より．数学的帰納法により全ての自然数 n について $2^n \geqq 2n$ が成り立つ．

(3) 左辺 $= 1.01^{100n} = {1.01^{100}}^{n}$

$> 2^n$　　($\because$ (1))

$\geqq 2n$　　($\because$ (2))　　証明終

大阪歯科大学2020推薦

Ⅳ (1) (a,b)を通って傾きmの直線は　$y=m(x-a)+b$

これと$y=x^2$を連立　　$x^2=m(x-a)+b$

整理して　　$x^2-mx+am-b=0$．　…①

$y=x^2$と$y=m(x-a)+b$が接するとき①は重解をもつので．①の判別式をDとして

$$D=(-m)^2-4(am-b)$$

$$=m^2-4am+4b=0\text{．}\quad\cdots②$$

②の判別式をD_2として

$$\frac{D_2}{4}=(-2a)^2-4b=4a^2-4b>0\quad(\because b<0)$$

よってmの2次方程式②は必ず異なる2つの解を持ち，それは(a,b)を通る接線が

2本存在することを示している

証明終

(2) ②を解く．　$m=2a\pm\sqrt{4a^2-4b}=\mathbf{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$

(3) $2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)\times2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)=-1$

$4(\cancel{a^2}-\cancel{a^2}+b)=-1$

$b=-\frac{1}{4}$　　aは任意．

∴ Pの軌跡は $\mathbf{b=-\frac{1}{4}}$