東京農業大 2021 A日程

1 (1) $x=-2-i$ を代入

$$(-2-i)^3+a(-2-i)^2+b(-2-i)+20=0$$

$$-8-12i+6+i+4a+4ai-a-2b-bi+20=0$$

$$18+3a-2b+i(-11+4a-b)=0$$

これが成り立つのは $18+3a-2b=0$ かつ $-11+4a-b=0$ のときで **$a=8,\ b=21$**

このとき3次方程式は.

$$x^3+8x^2+21x+20=0 \quad \cdots ①$$

実数係数の3次方程式が虚数解 $-2-i$ を解にもつとき、共役複素数 $-2+i$ も解にもつ.

$$(-2-i)+(-2+i)=-4, \quad (-2-i)(-2+i)=5$$

だから $-2-i$ と $-2+i$ を解にもつ2次方程式の1つは

$$x^2+4x+5=0$$

① は x^2+4x+5 を因数にもつことになり、

$$x^3+8x^2+21x+20=(x^2+4x+5)(x+4)=0.$$

よって ① の実数解は **-4**

(2) $\log_{10}20^{21}=21(\log_{10}2+1)=21\times1.3010=27.321$

したがって $20^{21}=10^{27.321}=10^{27}\times10^{0.321}$

ここで $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ だから $10^{0.3010}<10^{0.321}<10^{0.4771} \Leftrightarrow 2<10^{0.321}<3$

よって 20^{21} は **28** 桁の数で最高位の数は **2**

(3) $Q(X,Y)$ とおく.

P, Q の中点 $\left(\frac{X-4}{2}, \frac{Y-5}{2}\right)$ は $x+3y+8=0$ 上にある.

$$\frac{X-4}{2}+\frac{3(Y-5)}{2}+8=0 \Leftrightarrow X+3Y-3=0 \quad \cdots ①$$

$x+3y+8=0$ の傾きは $-\frac{1}{3}$

PQの傾きはこれと垂直なので3となるので $\frac{Y-(-5)}{X-(-4)}=3 \Leftrightarrow Y-3X-7=0 \quad \cdots ②$

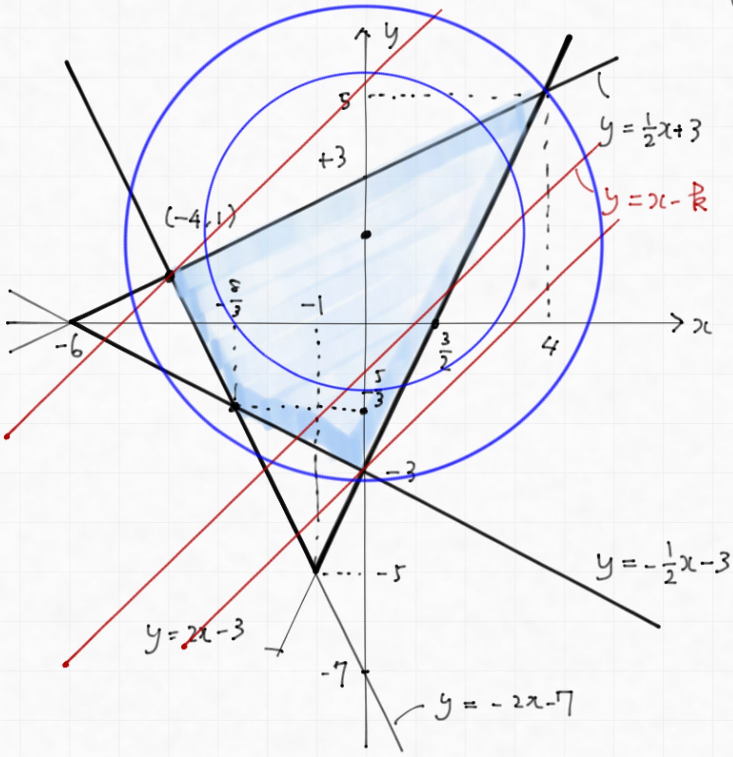
①②を連立. $(X,Y)=$ **$\left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$**

東京農業大 2021 A日程

2

$2|x+1|-y \leqq 5 \iff y \geqq 2|x+1|-5 \iff \begin{cases} y \geqq 2x-3 & (x \geqq -1) \\ y \geqq -2x-7 & (x<-1) \end{cases}$

$x-|2y| \geqq -6 \iff |2y| \leqq x+6 \iff \begin{cases} y \leqq \frac{1}{2}x+3 & (y \geqq 0) \\ y \geqq -\frac{1}{2}x-3 & (y<0) \end{cases}$



$y=-\frac{1}{2}x-3$ と $y=-2x-7$ の交点

$\frac{3}{2}x=-4 \qquad x=-\frac{8}{3},\ y=-\frac{5}{3}$

$y=\frac{1}{2}x+3$ と $y=2x-3$ の交点

$\frac{3}{2}x=6 \qquad x=4 \quad y=5$

$y=-2x-7$ と $y=\frac{1}{2}x+3$ の交点

$\frac{5}{2}x=-10 \qquad x=-4,\ y=1$

(1) 上図より $\mathbf{-4 \leqq x \leqq 4}$

(2) $x-y=k$ とおくと $y=x-k$

これは傾き1の直線で この直線が領域Dと共有点を持ちながら動く.

切片が$-k$だから切片が最小のときkは最大で. グラフより $(x,y)=(0,-3)$ のときkは最大

このとき $k=0-(-3)=3$

$(x,y)=(-4,1)$ のとき 切片は最大でkは最小.

このとき $k=-4-1=-5$ $\qquad \therefore\ \mathbf{-5 \leqq x-y \leqq 3}$

(3) $x^2+(y-2)^2=r^2$ とおくと これは中心$(0,2)$ 半径rの円を表している

この円がDと共有点を持つように変化したとき rが最大となるのは, 図より

$(x,y)=(-3,0)$ のとき $r^2=9+4=13$

$(x,y)=(4,5)$ のとき $r^2=4^2+3^2=25$

より $(x,y)=(4,5)$ のときで $r^2=25$ $\qquad \therefore\ \mathbf{0 \leqq x^2+(y-2)^2 \leqq 25}$

東京農業大 2021 A日程

3. (1) a と c の目の出方の総数は 6^2 通り.

1〜6の目から重複を許して2つを選ぶ選び方は $_6H_2 = {}_7C_2 = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ 通り.

これを小さいもの順に並べたものを a, c とすれば条件を満たす.

$$\therefore\ P(a \leqq c) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

(2) a, b, c の目の出方の総数は 6^3 通り.

1〜6の目から重複を許して3つを選ぶ選び方は $_6H_3 = {}_8C_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$ 通り.

小さいものから順に a, b, c として

$$P(a \leqq b \leqq c) = \frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$$

(2) a, b, c の目の出方の総数は 6^3 通り.

$b = k$ (k は $1 \leqq k \leqq 6$ を満たす整数) とすると. a, c は 1〜6のうち k を除く5つの数から重複を許して2つを選べばよい.

$$\sum_{k=1}^{6} 5^2 = 25\times 6$$

よって $$P(a \neq b,\ b \neq c) = \frac{25\times 6}{6^3} = \frac{25}{36}$$

東京農業大 2021 A日程

4.

(1) $a_2 = \dfrac{2+(1+1)a_1}{1+3} = \dfrac{2+2\times\frac{2}{3}}{4} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

$a_3 = \dfrac{2+(2+1)a_2}{2+3} = \dfrac{2+3\times\frac{5}{6}}{5} = \mathbf{\dfrac{9}{10}}$

(2) $b_n = (n+1)(n+2)a_n$ より $a_n = \dfrac{b_n}{(n+1)(n+2)}$ を漸化式に代入

$$\frac{b_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{2+\cancel{(n+1)}\times\dfrac{b_n}{\cancel{(n+1)}(n+2)}}{n+3}$$

$$\frac{b_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{b_n + 2(n+2)}{(n+2)(n+3)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \mathbf{2}(n+\mathbf{2})$$

$b_1 = (1+1)(1+2)a_1 = 2\cdot3\cdot\frac{2}{3} = 4$ だから

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+2) = 4 + \frac{6+2n+2}{2}\times(n-1) = 4+(n+4)(n-1) = n(n+\mathbf{3})$$

上式で $n=1$ とすると $b_1 = 1\times4 = 4$ となるので上式は $n=1$ でも成り立つ

(3) (2)より $a_n = \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n = \frac{1\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}\times\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n+2)}}{\cancel{n}(n+1)}\times\frac{\cancel{n}(n+3)}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}$$

$$= \mathbf{\frac{n+3}{3(n+1)}}$$