藤田医科2021(前)

1

						合計	AVE	
(1)	-14	16	21	a	b	$23+a+b$	$\frac{1}{5}(23+a+b)=5$	$a+b=2$
$x-\bar{x}$	-19	11	16	$a-5$	$b-5$			
$(x-\bar{x})^2$	361	121	256	$(a-5)^2$	$(b-5)^2$		164	

$$361+121+256+(a-5)^2+(b-5)^2=820$$

$$(a-5)^2+(b-5)^2=82$$

$b=2-a$ $\quad (a-5)^2+(a+3)^2=82$

$$2a^2-4a-48=0$$

$$(a-6)(a+4)=0$$

$$a=6,\ -4.$$

$(a,b)=(6,-4),(-4,6)$ $\quad$ $a<b$を満たすのは $(a,b)=(\mathbf{-4},\ 6)$

(2) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left\{\cos\theta\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\theta\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad a=\mathbf{\frac{-1}{6}}$

(3) 常用対数をとる $\quad x\log_{10}5000=y\log_{10}2000=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2\log_{10}5000}$, $y=\frac{1}{2\log_{10}2000}$ を $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ に代入

$$2\log_{10}5000+2\log_{10}2000=2\log_{10}5\times2\times10^6=\mathbf{14}$$

(4) $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\times2x\right)$

$f'(5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5+4}}\times\left(1+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2\cdot\cancel{3}}\times\frac{\cancel{9}\,3}{4}=\mathbf{\frac{3}{8}}$

(5) $\int_0^2 f(t)\,dt=I$ とすると $\quad f(x)=3x^2+Ix+a$

$I=\int_0^2 3t^2+It+a\,dt=\left[t^3+\frac{1}{2}It^2+at\right]_0^2=8+2I+2a$ $\qquad I+2a+8=0\ \cdots①$

$f(2)=12+2I+a=0\ \cdots②$

②×2−① $\quad 3I+16=0$ $\quad I=-\frac{16}{3}$, $a=\mathbf{-\frac{4}{3}}$

(6) $\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{9}\ \frac{2}{9}\ \frac{4}{9}\ \frac{5}{9}\ \frac{7}{9}\ \frac{8}{9}\ \Big|\ \frac{1}{27}\ \frac{2}{27}\ \frac{4}{27}\ \cdots$

第n群の末項は 3^n-1 項目

$\frac{728}{729}=\frac{728}{3^6}$ だから第6群の末項で $3^6-1=\mathbf{728}$ 項目.

初項から第728項目までに $\frac{1}{3^6}\sim\frac{728}{3^6}$ までが含まれているので総和は

$\frac{1}{\cancel{3^6}}\times\frac{1+728}{2}\times728=\mathbf{364}$

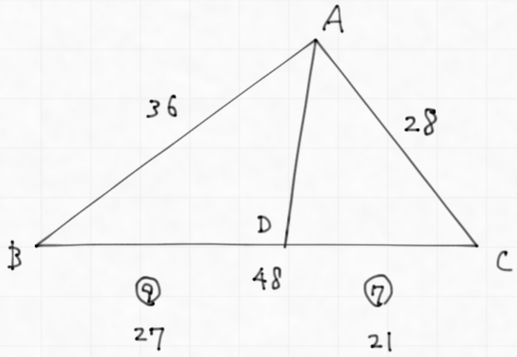
$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ と考えれば

$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{9}\ \frac{2}{9}\ \frac{4}{9}\ \frac{5}{9}\ \frac{7}{9}\ \frac{8}{9}\ \Big|$

までに $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \cdots \frac{8}{9}$ が揃っている

藤田医科2021(前)

(7)



$$BD = 48 \times \frac{36}{36+28} = 27$$

$$\cos\angle ABC = \frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot BA} = \frac{BD^2+BA^2-AD^2}{2BD\cdot BA}$$

$$\frac{48^2+36^2-28^2}{\underbrace{\cancel{2}\cdot\cancel{48}\cdot\cancel{36}}_{16}} = \frac{27^2+36^2-AD^2}{\underbrace{\cancel{2}\cdot\cancel{27}\cdot\cancel{36}}_{9}}$$

$$16AD^2 = -9(48^2+36^2-28^2)+16(27^2+36^2)$$

$$= -9(76\times20+36^2)+16\cdot9^2(3^2+4^2)$$

$$AD^2 = -9(19\times5+81)+9^2\times25$$

$$= 9(9\cdot25-95-81) = 9\cdot49$$

$\therefore\ AD = 3\cdot7 = 21$

(8) $$|\vec{a}+t\vec{b}|^2 = t^2|\vec{b}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2 = 13^2t^2+1014t+56^2+33^2$$

$$= 13^2\left(t+\frac{507}{13^2}\right)^2-\frac{507^2}{13^2}+56^2+33^2$$

$$= 13^2(t+3)^2-3\times507+56^2+33^2 = 13^2(t+3)^2+2704$$

$t=-3$ のとき最小値 $\sqrt{2704} = 52$

(9) $$\left(\frac{2-\sqrt{-77}}{9}\right)^{2021} = \frac{x-y\sqrt{-77}}{9}$$

$$\left(\frac{2+\sqrt{-77}}{9}\right)^{2021}\times\left(\frac{2-\sqrt{-77}}{9}\right)^{2021} = \frac{x+y\sqrt{-77}}{9}\times\frac{x-y\sqrt{-77}}{9}$$

$$\left(\frac{4+77}{81}\right)^{2021} = \frac{x^2+77y^2}{81}$$

$$x^2+77y^2 = 1^{2021}\times81 = 81$$

(10) 解と係数の関係より　$\alpha+\beta+\gamma = k-4$,　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = k+13$,　$\alpha\beta\gamma = 3k-15$.

$2\beta = \alpha+\gamma$ と連立して.　$3\beta = k-4$　　$2\beta^2+\gamma\alpha = k+13$

$\alpha\gamma = k+13-2\beta^2$ を $\alpha\beta\gamma = 3k-15$ に代入　$-2\beta^3+k\beta+13\beta = 3k-15$

ここに $k = 3\beta+4$ を代入　$-2\beta^3+3\beta^2+4\beta+13\beta-9\beta-12+15 = 0$

$2\beta^3-3\beta^2-8\beta-3 = 0 \iff (\beta+1)(2\beta^2-5\beta-3) = 0 \iff (\beta+1)(2\beta+1)(\beta-3) = 0$

$\beta = -1, -\frac{1}{2}, 3$　　$\beta=-1$ のとき $k=1$　$\alpha+\gamma=-2$, $\alpha\gamma=12$　α, γ は整数でないので不適

$\beta=3$ のとき $k=13$　$\alpha+\gamma=6$, $\alpha\gamma=8$　$(\alpha,\gamma)=(2,4),(4,2)$　$\therefore k = 13$

藤田医科2021(前)

2

(1) 3つのボールの取り出し方の総数は 4^3 通り.

4の倍数か否かは下2桁で決まり、下2桁が4の倍数となるのは

$*\ 1\ 2$, $*\ *\ 12$, $*\ 11\ ,2$

の3つのパターンが考えられる(*は任意のボール)

よって、もとめる確率は $\dfrac{4+4^2+4}{4^3} = \dfrac{3}{8}$

(2) できた整数が3の倍数となるのは各位の数の和が3の倍数のとき.

$11 \equiv 2 \pmod 3$, $12 \equiv 0 \pmod 3$ だから.

	1	2 or 11	12
3で割った余り	1	2	0

(i) 2 or 11が3回 2^3

(ii) 2 or 11が1回 1が1回 12が1回 $2\times1\times1\times3!$

(iii) 1が3回 1^3

(iv) 12が3回 1^3

$$\frac{2^3+2\cdot3!+1+1}{4^3} = \frac{22}{4^3} = \frac{11}{32}$$

(3) 3桁と6桁の数は 2^3 ずつ

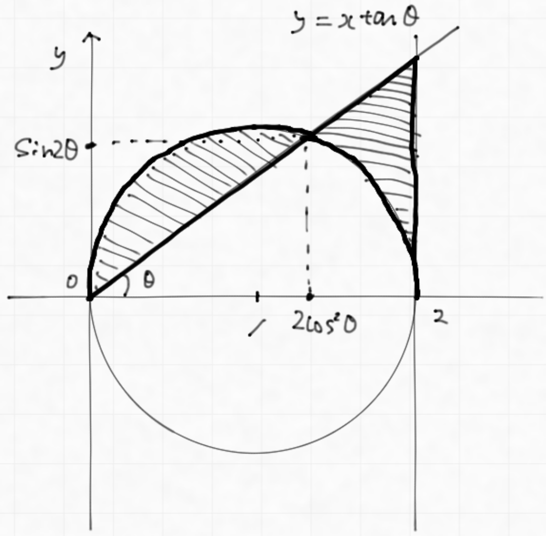
4桁のものは 1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222,
2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, ~~2221~~, ~~2222~~

5桁のものは 11111, 11112, 11121, 11122, 11211, 11212,
~~11221~~, ~~11222~~, 12111, 12112, 12121, 12122
12211, 12212, ~~12221~~, ~~12222~~, 21111, 21112
~~21121~~, ~~21122~~, 21211, 21212, ~~21221~~, ~~21222~~
~~22111~~, ~~22112~~, ~~22121~~, ~~22122~~, ~~22211~~, ~~22212~~, ~~22221~~, ~~22222~~

$8+8+14+16 = 46$ 通り

藤田医科2021(前)

3. (1) $(x-1)^2+y^2=1$ と $y=x\tan\theta$ の交点は $x^2-2x+x^2\tan^2\theta=0$ より $x=0,\ 2\cos^2\theta$



$x(x-2)+y^2\geqq 0 \rightleftarrows (x-1)^2+y^2\geqq 1$ だから

もとめる領域は

(i) $(x-1)^2+y^2>1$ かつ $y\leqq x\tan\theta$

(ii) $(x-1)^2+y^2<1$ かつ $y\geqq x\tan\theta$

(iii) $(x-1)^2+y^2=0$

のいずれかで．かつ．$y\geqq 0$，$0\leqq x\leqq 2$ を

満たす範囲で．右図のようになる

右図斜線部（境界含む）

(2) 回転体の体積を V とする．

$$V=\int_0^{2\cos^2\theta}\pi y^2\,dx-\frac{1}{3}\times\pi\sin^2 2\theta\times 2\cos^2\theta+\int_{2\cos^2\theta}^{2}\pi(x\tan\theta)^2\,dx-\int_{2\cos^2\theta}^{2}\pi y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{2\cos^2\theta}2x-x^2\,dx-\frac{8}{3}\pi\sin^2\theta\cos^4\theta+\pi\tan^2\theta\int_{2\cos^2\theta}^{2}x^2\,dx+\pi\int_2^{2\cos^2\theta}2x-x^2\,dx$$

$$=\pi\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\cos^2\theta}+\pi\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_2^{2\cos^2\theta}-\frac{8}{3}\pi\sin^2\theta\cos^4\theta+\frac{1}{3}\pi\tan^2\theta\left[x^3\right]_{2\cos^2\theta}^{2}$$

$$=\pi\left(4\cos^4\theta-\frac{8}{3}\cos^6\theta\right)\times 2-\pi\left(4-\frac{8}{3}\right)-\frac{8}{3}\pi(\cos^4\theta-\cos^6\theta)+\frac{8}{3}\pi\tan^2\theta-\frac{8}{3}\pi\tan^2\theta\cdot\cos^6\theta$$

$$=8\pi\cos^4\theta-\cancel{\frac{16}{3}\pi\cos^6\theta}-\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{3}\pi\cos^4\theta+\cancel{\frac{8}{3}\pi\cos^6\theta}+\frac{8}{3}\pi\tan^2\theta-\frac{8}{3}\pi\cos^4\theta+\cancel{\frac{8}{3}\pi\cos^6\theta}$$

$$=\frac{8}{3}\pi\cos^4\theta+\frac{8}{3}\pi\tan^2\theta-\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi\cos^4\theta+\frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)-\frac{4}{3}\pi$$

$\cos^2\theta=t$ とおく $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ より } 0<t<1\right)$

$$V=\frac{8}{3}\pi t^2+\frac{8}{3t}\pi-4\pi$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{16}{3}\pi t+\frac{8}{3}\pi(-1)\cdot\frac{1}{t^2}=\frac{8\pi(2t^3-1)}{3t^2}$$

$\frac{dV}{dt}=0$ となるのは $t=2^{-\frac{1}{3}}=\cos^2\theta$ のときで

V の増減は右のようになる

t	0	$\cdots$	$2^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dt}$		$-$	0	$+$	
V		$\searrow$		$\nearrow$	

$t=2^{-\frac{1}{3}}$ のとき $V=\frac{8}{3}\pi\cdot 2^{-\frac{2}{3}}+\frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\pi-4\pi=\frac{\pi}{3}\left(2^{\frac{7}{3}}+2^{\frac{10}{3}}-12\right)=\frac{2^{\frac{7}{3}}}{\cancel{3}}\pi(\cancel{1+2})-3\pi=\left(2^{\frac{7}{3}}-4\right)\pi=4\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)\pi$

このとき $\cos\theta=2^{-\frac{1}{6}}$