麻布大学2020

I (1) 3を底とする対数をとる

$$x\log_3 5 = y\cdot\log_3 9 = \frac{1}{2}\log_3 45$$

$$\Leftrightarrow\quad x\log_3 5 = 2y = \frac{1}{2}(2+\log_3 5)$$

$$\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{2},\quad y = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log_3 5$$

これらを $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ に代入

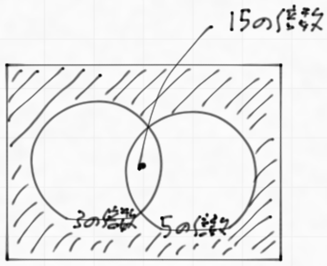
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{2\log_3 5}{2+\log_3 5}+\frac{4}{2+\log_3 5} = \frac{4+2\log_3 5}{2+\log_3 5} = \mathbf{2}$$

(2) 実数係数の3次方程式だから $3+4i$ と共役な $3-4i$ も解にもつ. 実数解を α として解と係数の関係より

$$3+4i+3-4i+\alpha = -p,\quad (3+4i)(3-4i)+(3+4i)\alpha+(3-4i)\alpha = q\quad (3+4i)(3-4i)\alpha = 50$$

$$\Leftrightarrow\quad 6+\alpha = -p,\quad 25+6\alpha = q,\quad \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha = \mathbf{2},\ p = \mathbf{-8},\ q = \mathbf{37}$$



(3) $1000\div 3 = 333\cdots 1$　　3の倍数は **333** コ

$1000\div 15 = 66\cdots 10$　　15 〃 **66** コ

$1000\div 5 = 200$

$$1000-(333+200-66) = \mathbf{533}$$

(4) 男子のみ選ばれる $\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 7} = \frac{5}{42}$

少なくとも1人の女子が選ばれるのは $1-\frac{5}{42} = \mathbf{\frac{37}{42}}$

(5) $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt = I$ とおく.

$$f(x) = 5+Ix$$

$$I = \int_{-2}^{4} It+5\,dt = \left[\frac{1}{2}It^2+5t\right]_{-2}^{4} = 8I+20-(2I-10) = 6I+30$$

$$I = -6\qquad \therefore\ f(x) = \mathbf{-6x+5}$$

麻布大学2020

Ⅱ (1) $\overrightarrow{AB}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(4,-3,5)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12-12+0=0$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^4\cdot 2-0^2}=\frac{25\sqrt{2}}{2}=\frac{25}{\sqrt{2}}$$

(2) 2つの直線から距離の等しい点を(X,Y)とすると

$$\frac{|3X-4Y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5X+12Y|}{\sqrt{(-5)^2+(12)^2}}$$

$$13(3X-4Y)=\pm 5(-5X+12Y) \qquad Y=\frac{4}{7}X,\ Y=-\frac{7}{4}X$$

$$y=-\frac{7}{4}x,\quad y=\frac{4}{7}x$$

(3) $(2,1)$を代入 $1=2a(2+b)$ $2+b=\frac{1}{2a}$ $b=\frac{1-4a}{2a}$

$$y=ax^2+abx=a\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{ab^2}{4}$$

頂点を(X,Y)とすると $X=-\frac{b}{2}$, $Y=-\frac{ab^2}{4}$

$$X=-\frac{1}{4a}+1 \qquad Y=-\frac{1}{4}\cancel{a}\frac{(1-4a)^2}{4a^{\cancel{2}}}$$

$4a=\frac{1}{1-X}$ をYの式に代入

$$Y=-\frac{1}{4}\times\frac{\left(1-\frac{1}{1-X}\right)^2}{\frac{1}{1-X}}=-\frac{1}{4}\times\frac{X^2}{1-X}$$

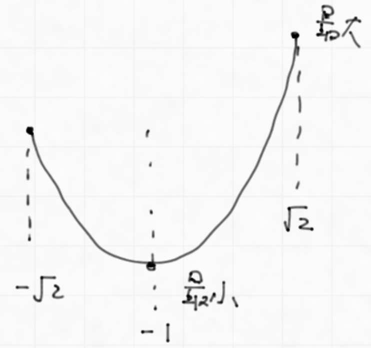
よって(X,Y)は

$$y=\frac{x^2}{4(x-1)}$$ という関係を満たす。

麻布大学2020

[1] (1) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

したがって tの範囲は $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$



(2) $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ より $\cos x \sin x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$f(x) = t + \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}$

(3) $f(x) = \frac{1}{2}(t+1)^2 - 1$ となるので、$t = -1$, すなわち $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = -1$ のとき

$f(x)$は最小値-1をとる。 $x + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ $x = \pi, \frac{3}{2}\pi$

また $t = \sqrt{2}$ のとき 最大値 $\frac{1}{2}\sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ をとる。このとき $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = 1$ だから $x = \frac{1}{4}\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき 最大値 $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

$x = 1\pi + \frac{3}{2}\pi$ のとき 最小値 -1

麻布大学2020

IV

[1] 公差をdとする

(1) $a_n = 50+(n-1)d$

$$a_9+a_{10}+\cdots+a_{18} = \frac{50+8d+50+17d}{2}\times(18-9+1) = \frac{100+25d}{2}\times 10 = 0$$

$d=-4$

(2) $a_n = 50-4(n-1) = 54-4n<0$ を解くと $n>\frac{27}{2}$ 第14項から負となる

(3) $a_n>0$ の間は増加するので 第13項までの和が最大

$$S_{13} = \frac{50+(54-52)}{2}\times 13 = 26\times 13 = 338$$

[2] (1) $$c_{n+1}-c_n = \frac{p(n+1)+q}{(n+2)(n+1)} - \frac{pn+q}{(n+1)n}$$

$$= \frac{\cancel{pn^2}+pn+\cancel{qn}-\cancel{pn^2}-2pn-\cancel{qn}-2q}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-pn-2q}{n(n+1)(n+2)} = b_n$$

係数比較して $-p=3$, $-2=-2q$ $p=-3$, $q=1.$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k) = c_{n+1}-c_1 = \frac{-3n-2}{(n+2)(n+1)} - \frac{-3+1}{1\times 2}$$

$$= \frac{-3n-2}{(n+1)(n+2)}+1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$ ④