金沢大学2022

1 (1) $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$z^4 = -4$ は $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ となる.

これが成立するのは $r = \sqrt{2}$, $4\theta = \pi + 2\pi \times n$ (nは自然数) のときで.

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

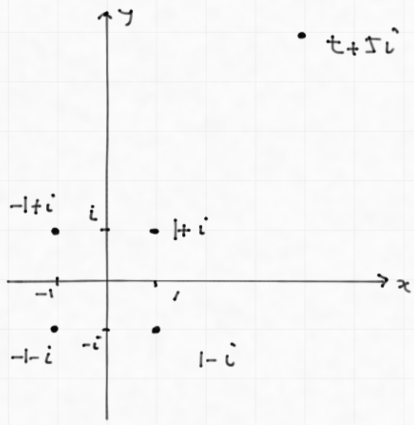
$= \mathbf{1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i}$

(2) $|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$

$= (\alpha + iw)(\bar{\alpha} - i\bar{w}) + (\alpha - iw)(\bar{\alpha} + i\bar{w})$

$= \alpha\bar{\alpha} \cancel{- i\alpha\bar{w}} \cancel{+ i\bar{\alpha}w} + w\bar{w} + \alpha\bar{\alpha} \cancel{+ i\alpha\bar{w}} \cancel{- i\bar{\alpha}w} + w\bar{w}$

$= 2|\alpha|^2 + 2|w|^2 = 2\cdot\sqrt{2}^2 + 2\cdot 3 = \mathbf{10}$



(3) $t \geqq 0$ のときを考える.

円の中心 $t+5i$ と最も近いのは $1+i$

したがって. もとめる条件は $1+i$ と $t+5i$ との距離は

5よりも短かく. $-1+i$, $1-i$ との距離は 5よりも長いことである

$-1-i$ は明らかに最も遠い.

$(t-1)^2 + 4^2 < 5^2$, $(t+1)^2 + 4^2 \geqq 5^2$, $(t-1)^2 + 6^2 \geqq 5^2$

$\Leftrightarrow$ $-2 < t < 4$, $t \geqq 2$, $t \leqq -4$, 必ず成立

$\Leftrightarrow$ $2 \leqq t < 4$

$t < 0$ のときも同様. 対称性から. $-4 < t \leqq -2$

以上より $\mathbf{-4 < t \leqq -2}$ **または** $\mathbf{2 \leqq t < 4}$

2

(1) $k(\log x)^2 = f(x)$ と表す。　　$f'(x) = 2k\log x \times \frac{1}{x} = \frac{2k\log x}{x}$

$(p,\ k(\log p)^2)$ における接線は、

$$y = \frac{2k\log p}{p}(x-p) + k(\log p)^2 \qquad y = \frac{2k\log p}{p}x - k\log p(2-\log p)$$

(2) Aが (1) の接線上にある。

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e = -k\log p(2-\log p)$$

$\log p = X$ と表すと

$$kX^2 - 2kX - \frac{\sqrt{3}}{2}e = 0 \quad \cdots ①$$

$k>0$ だから、①式はXについての2次方程式で、その判別式をDとすると

$$D/4 = k^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ek = k\left(k+\frac{\sqrt{3}}{2}e\right) > 0 \quad (\because k>0)$$

よって①は異なる2つの実数解をもち、1つのXに対し、pが一意に定まるので、Aを通る接線は2本存在することが分かる。

(3) ①の2解をα, βとすると　$\alpha+\beta = 2$,　$\alpha\beta = -\frac{\sqrt{3}e}{2k}$

また、接点p, qはα, βを用いて、e^{α} および e^{β} と表せるので、

2つの接線の傾きは　$\frac{2k\alpha}{e^{\alpha}}$, $\frac{2k\beta}{e^{\beta}}$ と表せる。

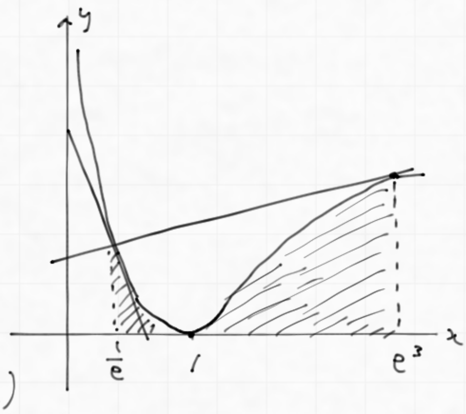
接線は直交するので　$\frac{2k\alpha}{e^{\alpha}} \times \frac{2k\beta}{e^{\beta}} = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{4k^2\alpha\beta}{e^{\alpha+\beta}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2\cancel{4k^2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}e}{\cancel{2k}}\right)}{e^{\cancel{2}}} = \cancel{-}1 \Leftrightarrow k = \frac{e}{2\sqrt{3}}$$

このとき、①は　$\frac{e}{2\sqrt{3}}X^2 - \frac{e}{\sqrt{3}}X - \frac{\sqrt{3}}{2}e = 0 \Leftrightarrow X^2-2X-3=0 \Leftrightarrow X=-1,\ 3\ (=\alpha, \beta)$

よって、$p = e^{-1}$, $q = e^3$

(4) $k = \frac{e}{2\sqrt{3}} > 0$ だから　$y=f(x)$ のグラフの概形は右のようになる



$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{e}{2\sqrt{3}}(\log x)^2 dx = S$ とおく。

$$\int(\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x\times 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$$ だから (Cは積分定数)

$$S = \frac{e}{2\sqrt{3}}\Big[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e^3}$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{3}}\left(e^3\times 9 - 2e^3\times 3 + 2e^3\right) - \frac{e}{2\sqrt{3}}\left(+\frac{1}{e}+\frac{2}{e}+\frac{2}{e}\right) = \frac{5}{2\sqrt{3}}e^4 - \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}(e^4-1)}{6}$$

3

2次方程式は実数解を持つので判別式を D として

$$D = p^2 - 4q \geqq 0 \quad \cdots ①$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q \quad \cdots ②$$

$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$ より

$$(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta = 3$$

② の値を代入

$$p^2 - 3q = 3 \cdots ③$$

$$M = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 1} = \frac{q}{q^2 + p^2 - 2q + 1}$$

ここに ③ より $p^2 = 3q + 3$ を代入

$$M = \frac{q}{q^2 + q + 4} \quad \cdots ④$$

また、① ③ より、 $3q + 3 - 4q \geqq 0 \iff q \leqq 3$

また $p^2 = 3 + 3q \geqq 0$ より $q \geqq -1$ まとめると $-1 \leqq q \leqq 3$

④式右辺を $f(q)$ とおくと

$$f'(q) = \frac{q^2 + q + 4 - q(2q+1)}{(q^2+q+4)^2} = \frac{(2+q)(2-q)}{(q^2+q+4)}$$

q	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(q)$		$+$	0	$-$	
$f(q)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f'(q) = 0$ となるのは $q = 2, -2$. $f(q)$ の増減は右のとおり

$$f(-1) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad f(3) = \frac{3}{16}$$

だから $f(q)$ は $q = 2$ で最大値 $\frac{1}{5}$, $q = -1$ で最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる.

$q = 2$ のとき $p = \pm 3$ このとき 2次方程式は $x^2 \pm 3x + 2 = 0$ だから $(\alpha, \beta) = (1, 2), (-2, -1)$

$q = -1$ 〃 $p = 0$ 〃 $x^2 - 1 = 0$ だから $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$

最大値は $\frac{1}{5}$ $(q = 2, p = \pm 3)$ このとき $(\alpha, \beta) =$ **$(1, 2)$ または $(-2, -1)$**

最小値は $-\frac{1}{4}$ $(q = -1, p = 0)$ このとき (α, β) は **$(-1, 1)$**

4

(1) $8=2^3$ だから $A_8=\{1,2,4,8\}$ $\quad S_8=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}=1\times\frac{1-(\frac{1}{4})^4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{256}\right)=\frac{85}{64}$

$12=2^2\cdot 3$ だから $A_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$

$$S_{12}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{12^2}=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)=\frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{16}_{8}}\times\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{9}_{3}}=\frac{35}{24}$$

(2) nの約数は p^l $(l=0,1,2\dots k)$ と表されるので A_nの要素の個数は $k+1$

(3) A_nの要素は $p^{k'}q^{l'}$ $(0\leqq k'\leqq k,\ 0\leqq l'\leqq l)$ と表せる.

このとき $p^{k'}q^{l'}$ は nの約数だから

$$n=(p^{k'}q^{l'})\times m$$

を満たす整数 m が存在し $n=p^kq^l$ だから $m=p^{k-k'}q^{l-l'}$ $\quad(0\leqq k-k'\leqq k,\ 0\leqq l-l'\leqq l)$

となる. このことは m が A_nの要素であることを示しているが. $p^{k'}q^{l'}$の値が変われば mの値も変化することを考えると. $p^{k'}q^{l'}$がA_nの全ての要素をとるとき 対応する mの集合もまた A_nと一致する.

以上の考察より S_n は

$$S_n=\sum_{l'=1}^{l}\left(\sum_{k'=1}^{k}\left(\frac{1}{p^{k'}q^{l'}}\right)^2\right)=\sum_{l'=1}^{l}\left(\sum_{k'=1}^{k}\left(\frac{p^{k-k'}q^{l-l'}}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{l'=1}^{l}\left(\sum_{k'=1}^{k}\left(p^{k-k'}q^{l-l'}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}(1+p^2+\cdots+p^{2k})(1+q^2+\cdots+q^{2l})$$

$$=\frac{1}{n^2}\times\frac{p^{2(k+1)}-1}{p^2-1}\times\frac{q^{2(l+1)}-1}{q^2-1}$$

$$=\frac{1}{p^{2k}\cdot q^{2l}}\left(\frac{p^{2k+2}-1}{p^2-1}\times\frac{q^{2l+2}-1}{q^2-1}\right)$$

$$=\frac{\left(p^2-\frac{1}{p^{2k}}\right)\left(q^{2l}-\frac{1}{q^{2l}}\right)}{(p^2-1)(q^2-1)}$$

$$<\frac{p^2q^2}{(p^2-1)(q^2-1)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)}$$

ここで $p<q$ としても一般性は失われず. 上式では分母が小さいほど値は大きくなることから

上式は $p=2,\ q=3$ としたとき, 最大となる.

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)}\leqq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}=\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{3}{2}$$

よって $n=p^kq^l$について $S_n<\frac{3}{2}$ が成立する. 証明終