三重大学2020

1 (1) $x=2$で極値4をとるので $f(x)=a(x-2)^2+4$ とおける.

これが$(4,3)$を通るので $3=a(4-2)^2+4$ $a=-\frac{1}{4}$ $\therefore$ $\mathbf{f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4}$

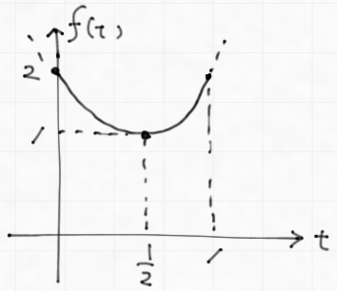
(2) 16より大きくなるのは $(7,10),(8,9),(8,10),(9,10)$ の4通り

$$1-\frac{4}{{}_{10}C_2}=1-\frac{2\cdot4}{\cancel{10}^{5}\cdot9}=\mathbf{\frac{41}{45}}$$

(3) $-4\cos^2\theta-4\sin\theta+6=-4(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+6=4\sin^2\theta-4\sin\theta+2$ …①

ここで$\sin\theta=t$とすると. $0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq\sin\theta\leqq1$ だから $0\leqq t\leqq1$

①は $4t^2-4t+2$ となる。これを$f(t)$とすると. $0\leqq t\leqq1$で$f(t)$の最大値および最小値を考えれば良いので



$$f(t)=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

$t=\frac{1}{2}$で最小値 **1** をとるこのときθは

$\sin\theta=\frac{1}{2}$より $\theta=\mathbf{\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi}$

$t=0,1$のとき最大値 **2** をとる. このときθは

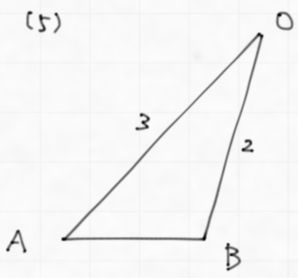
$\sin\theta=0,1$ より $\theta=\mathbf{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi}$

(4) 真数条件より $x>3$

底を2に揃える $\frac{\log_2(x-3)}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}-\log_2(x-3)>\frac{\log_2 9}{\log_2 4} \iff 2\log_2(x-3)-\log_2(x-3)>\log_2 3$

$\iff \log_2(x-3)>\log_2 3 \iff x>6$ $\therefore$ $\mathbf{x>6}$

(5)



$|\vec{OP}|^2=|-\vec{OA}+2\vec{OB}|^2=|\vec{OA}|^2+4|\vec{OB}|^2-4\vec{OA}\cdot\vec{OB}$

$=9+16-4\times4=9$ $\therefore$ $|\vec{OP}|=\mathbf{3}$

$\vec{OP}\cdot\vec{OA}=-|\vec{OA}|^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-9+8=-1$

$\cos\angle AOP=\frac{\vec{OA}\cdot\vec{OP}}{|\vec{OA}||\vec{OP}|}=\frac{-1}{3\cdot3}=-\frac{1}{9}$

$\sin\angle AOP=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\triangle AOP=\frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OP}|\sin\angle AOP=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{4\sqrt{5}}{9}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

三重大学 2020

2 (1) $b_2 = (a_1 - b_1 + 1)^2 - p(a_1 - b_1) - q$

$$= \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{4} + \frac{p}{2} - \frac{3}{4} + 1\right)^2 - p\left(\frac{p}{2} - \frac{1}{4} + \frac{p}{2} - \frac{3}{4}\right) - q$$

$$= p^2 - p(p-1) - q = p - q = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{q = p - \frac{1}{2}}$$

(2) $u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$

$$= \cancel{(a_n - b_n + 1)^2} + p(a_n - b_n) + q - \cancel{(a_n - b_n + 1)^2} + p(a_n - b_n) + q$$

$$= 2p(a_n - b_n) + 2p - 1 = 2pu_n + 2p - 1 \qquad \boldsymbol{u_{n+1} = 2pu_n + 2p - 1}$$

(3) (2)の漸化式は

$$u_{n+1} + 1 = 2p(u_n + 1)$$

と変形できる。そしてこれは、$\{u_n + 1\}$が初項$u_1 + 1$、公比$2p$の等比数列であることを示している

$$u_n + 1 = (u_1 + 1)(2p)^{n-1} = (a_1 - b_1)(2p)^{n-1} = p(2p)^{n-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{u_n = p(2p)^{n-1} - 1}$$

(4)

$$a_{n+1} = (a_n - b_n + 1)^2 + p(a_n - b_n) + q$$

$$b_{n+1} = (a_n - b_n + 1)^2 - p(a_n - b_n) - q \quad (+$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n - b_n + 1)^2 = 2(u_n + 1)^2$$

$$= 2p^2(2p)^{2(n-1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n + b_n = 2p^2(2p)^{2(n-2)} \qquad (n = 2, 3, 4 \dots)$$

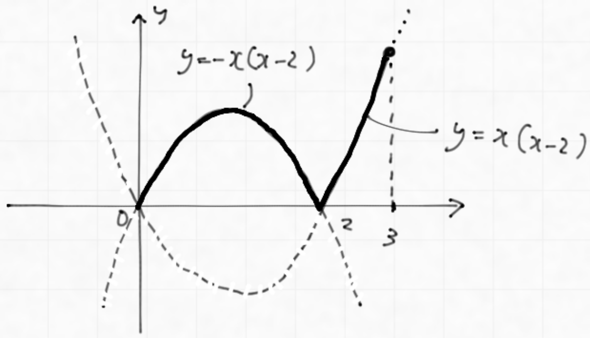
$n=1$とすると $a_1 + b_1 = 2p^2 \times (2p)^{-2} = \frac{1}{2} = a_1 + b_1$ となり、$n=1$でも成り立つ

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{2n-3} p^{2n-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (2p)^{2n}}{1 - (2p)^2} = \boldsymbol{\frac{1 - (2p)^{2n}}{2(1 - 4p^2)}}$$

三重大学2020

3-2 (1) $x \geqq 2$ のとき $f(x) = x(x-2)$

$x < 2$ 〃 $f(x) = -x(x-2)$



(2) (i) $t+1 \leqq 2$ のとき. $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$g(t) = \int_t^{t+1} x|x-2|\,dx = \int_t^{t+1} -x(x-2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_t^{t+1} = -\frac{1}{3}(t+1)^3 + (t+1)^2 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = -t^2 + t + \frac{2}{3}$$

(ii) $t+1 > 2$ のとき $(1 < t \leqq 2)$

$$g(t) = \int_t^{t+1} x|x-2|\,dx = \int_t^2 x|x-2|\,dx + \int_2^{t+1} x|x-2|\,dx = \int_t^2 -x(x-2)\,dx + \int_2^{t+1} x(x-2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_t^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{t+1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4\right) \times 2 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}(t+1)^3 - (t+1)^2$$

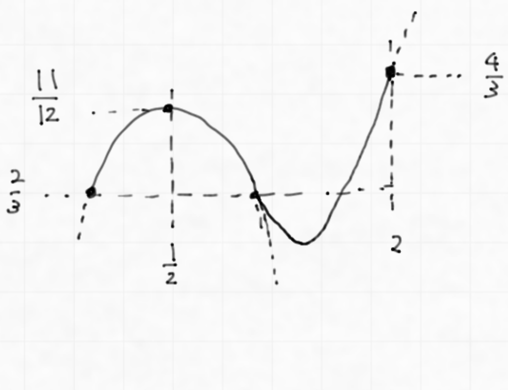
$$= \frac{8}{3} + \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2$$

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 + t + \frac{2}{3} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2 & (1 < t \leqq 2) \end{cases}$$

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき. $g(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}$

$1 < t < 2$ のとき $g'(t) = 2t^2 - 2t - 1$ $g'(t) = 0$ となるのは $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $(\because 1 < t < 2)$

t	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{4}{3}$



$g(t)$ は右のようになる

極大値を与える t は $t = \frac{1}{2}$

極小値を与える t は $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$