京都薬科大学2022

1 (1) $f(x)-g(x) = -8x^2+26x-20 = -2(4x^2-13x+10) = -2(x-2)(4x+5)$

$f(x)$と$g(x)$が$x-\alpha$を因数にもつとき、$f(x)-g(x)$も同じ$x-\alpha$を因数にもつ.

つまり共通の因数は $x-2$ または $4x+5$.

$x-2$とすると $f(2) = 8+4a-32+20+a-11 = 5a-15=0 \quad a=3.$

$g(2) = 8+4a-32+a+9 = 5a-15=0 \quad a=3.$

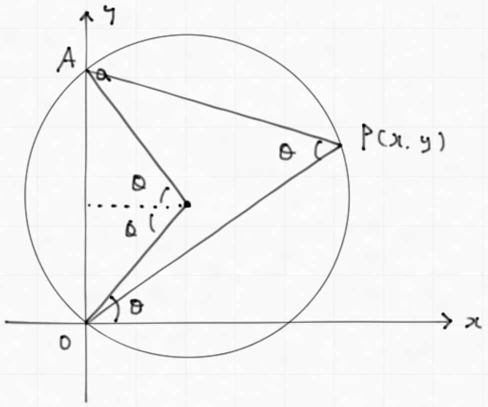
$a=3$とすれば. $f(x)$も$g(x)$も$x-2$を因数にもつ.

このとき $g(x) = x^3+3x^2-16x+12 = (x-2)(x^2+5x-6) = (x-2)(x+6)(x-1)$

$g(x)=0$の解は **$-6, 1, 2$**

共通因数が$4x+5$のとき $f(-\frac{5}{4})=0$と$g(-\frac{5}{4})=0$は同時に成立しないので不適

(2)



半径をrとすると中心は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$r\sin\theta = \frac{a}{2}$, $\tan\theta = m$

円は $(x-r\cos\theta)^2+(y-r\sin\theta)^2 = r^2$

$x^2-2r\cos\theta\, x+y^2-2r\sin\theta\, y = 0$

$r\sin\theta = \frac{a}{2}$ より $2r = \frac{a}{\sin\theta}$ を代入

$x^2-\frac{a}{\tan\theta}x+y^2-ay=0$

$x^2+y^2-\mathbf{\frac{a}{m}}x-\mathbf{a}y=\mathbf{0}$

(3) $\log_{10}\left(\frac{1}{15}\right)^{10} = 10\left(\log_{10}\frac{2}{3\cdot 10}\right) = 10(0.3010-0.4771-1) = -11.761$

$\left(\frac{1}{15}\right)^{10} = 10^{-11.761} = 10^{-12}\times 10^{0.239}$ $\quad 1 < 10^{0.239} < 2$ $\quad$ 小数第**12**位 **1**

(4)　$x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$

$0\leqq x\leqq 2\pi$, $0\leqq y\leqq 2\pi$ より　$0\leqq x+y\leqq 4\pi$.

したがって　$x+y=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$

$x+y=\frac{\pi}{2}$ のとき.　$0\leqq x=\frac{\pi}{2}-y\leqq 2\pi$ だから　$0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$

$xy^2=\left(\frac{\pi}{2}-y\right)y^2=f(y)$　　$f'(y)=\pi y-3y^2=y(\pi-3y)$

y	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(y)$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(y)$ は $y=\frac{\pi}{3}$ で極大かつ最大.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=\frac{\pi^3}{54}$.　$(x,y)=\left(\frac{1}{6}\pi,\frac{\pi}{3}\right)$

$x+y=\frac{5}{2}\pi$ のとき.　$0\leqq x=\frac{5}{2}\pi-y\leqq 2\pi$ より　$\frac{1}{2}\pi\leqq y\leqq 2\pi$.

$xy^2=\left(\frac{5}{2}\pi-y\right)y^2=g(y)$　　$g'(y)=5\pi y-3y^2=y(5\pi-3y)$

y	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$g(y)$ は $y=\frac{5}{3}\pi$ で極大かつ最大.

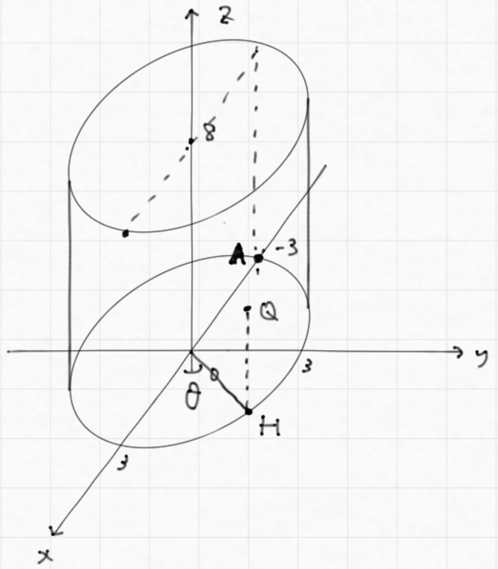
$g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi\left(\frac{5}{3}\pi\right)^2=\frac{125\pi^3}{54}$

$(x,y)=\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$

以上より.　$\frac{\pi^3}{54}<\frac{125}{54}\pi^3$ だから.

$(x,y)=\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$ のとき xy^2 は最大となり最大値は $\frac{125}{54}\pi$

V



(1) 最大 (3, 0, 8) まで $\sqrt{8^2+6^2} = \mathbf{10}$

最小 (−3, 0, 8) まで $\mathbf{8}$

(2) $P(x, 2, 8)$ と A とのきょりは

$$(x+3)^2 + 2^2 + 8^2 = 9^2$$

$$x+3 = \pm\sqrt{13}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{13}$$

x は上面上にあることから $-3 \leqq x \leqq 3$

$$\therefore \quad \mathbf{x = -3+\sqrt{13}}$$

(3) $x = \mathbf{3\cos\theta} \qquad y = \mathbf{3\sin\theta}$

$$Q(3\cos\theta, 3\sin\theta, 7)$$

$$AQ^2 = (3\cos\theta+3)^2 + (3\sin\theta)^2 + 7^2 = 9^2$$

$$9 + 18\cos\theta + 9 + 49 = 81$$

$$\cos\theta = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \qquad \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$Q\left(\mathbf{\frac{7}{3}}, \mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{3}}, 7\right)$$

(4) $$\vec{AP}\cdot\vec{AQ} = \begin{pmatrix}\sqrt{13}\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{4\sqrt{2}}{3}\\7\end{pmatrix} = \frac{16}{3}\sqrt{13} + \frac{8}{3}\sqrt{2} + 56 = \mathbf{\frac{16\sqrt{13}+8\sqrt{2}+168}{3}}$$

III

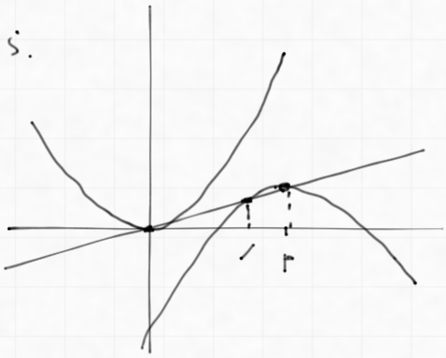
(1) $x^2 = -x^2+2px-p \iff 2x^2-2px+p=0$

これが解を持たないとき，共有点は存在しない．

判別式をDとして $D/4 = p^2-2p<0$ $\quad$ **$0<p<2$**

C_1の頂点は $(0, 0)$ $\quad$ C_2の頂点は (p, p^2-p) だから．

$y=(p-1)x$



$p-1>0$のとき．ℓとC_2の交点は

$-x^2+2px-p=(p-1)x$ を解くと

$x^2-(p+1)x+p=0$ $\quad$ $x=p, 1$

$$S=\int_1^p (p-1)x-(-x^2+2px-p)\,dx = \frac{1}{6}(p-1)^3$$

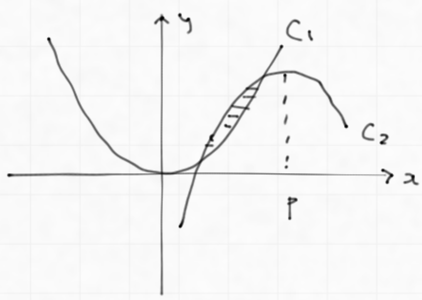
$p-1<0$のとき

$$S=\int_p^1 (p-1)x-(-x^2+2px-p)\,dx = -\frac{1}{6}(p-1)^3 = \frac{1}{6}(1-p)^3$$

(2) (1)より異なる共有点を持つのは **$p>2$** のとき (∵ $p>0$)

交点は $2x^2-2px+p=0$ を解いて

$$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2p}}{2}$$



$$S=\frac{1+1}{6}\left(\frac{p+\sqrt{p^2-2p}}{2}-\frac{p-\sqrt{p^2-2p}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}(p^2-2p)\sqrt{p^2-2p} = \frac{1}{3}p(p-2)\sqrt{p(p-2)}$$

(3) (1)より $p=2$

このとき $2x^2-2px+p=0$ は $2x^2-4x+2=0$ $\quad$ ∴ $x=1$

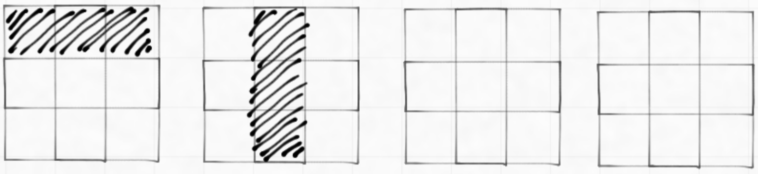
共有点は **$(1, 1)$**

$(x^2)'=2x$ だから C_1の$(1, 1)$における接線は $y=2(x-1)+1$

∴ **$y=2x-1$**

IV

(1)



(2) 4通り.

(3) $(b, r) = (3, 1), (3, 2), (3, 3)$ が揃えばよい

$$\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\times 3! = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$$

(1, 1), (2, 2), (3, 3) と (3, 1), (2, 2), (1, 3) の 2パターン

$$\frac{1}{7776}\times 2 = \frac{1}{3888}$$

(4) b も r も 1〜3 となるのは $\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$ その余事象は $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3連続で枠外となるのは $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

(5) $\left(\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\right)\times 2!\times 3 = \frac{1}{216}$