立命館大2021

1

(1) (i) 右に移動することを → 奥に移動することを ↗ 上に移動することを ↑ と表す。

A→Pへ移動するのは →→↗ の3つを並べて $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り

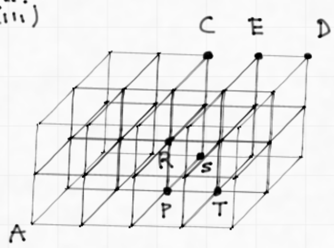
A→Bへ移動するのは →→→→↗↗ を並べて $\frac{6!}{4!2!}=15$ 通り

A→P→Bと移動するのは、→→↗ および →→↗ を並べて $\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=9$ 通り

(ii) A→Cへ移動するのは →→↗↗↑↑ を並べて $\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot4}=90$ 通り

A→P→R→C と移動するのは、→→↗，↑，↗↑ を並べて $\frac{3!}{2!1!}\times1\times\frac{2!}{1!1!}=6$ 通り

(iii)



仮にCEがつながっていたとすると A→Dは

→→→→↗↗↑↑ を並べて $\frac{8!}{4!2!2!}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot7\cdot6\cdot5}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}}=420$ 通り

このなかで、CEを通っているのは A→C→D で(ii)より 90通り。

よってもとめる総数は $420-90=330$ 通り

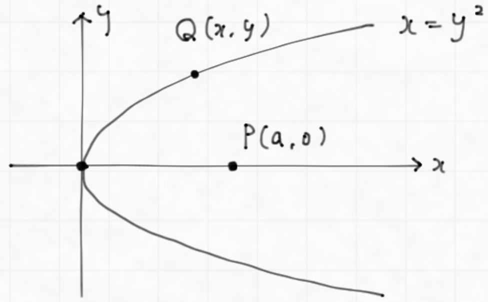
(2) (ii)より $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

A→P→C $=\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$ (右の3つずつを並べる) →→↗，↗↑↑

A→P→R→C 6通りだから $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

立命館大2021

2



$$PQ = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + x + a^2} = f(x)$$

$$f(x)^2 = \left(x - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{(2a-1)^2}{4} = \left(x - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$$

Qは $x = y^2$ 上にあるので $x \geqq 0$.

したがって $\frac{2a-1}{2} > 0$ すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき. $x = \frac{2a-1}{2}$ のときに最小となり.

$a \leqq \frac{1}{2}$ のとき. $x = 0$ のとき最小となり. 最小値は $f(0) = a$

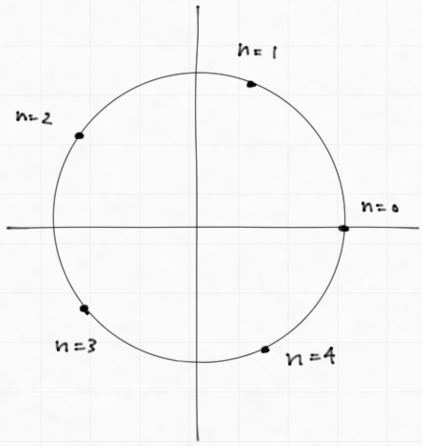
このとき Q は 1個で $(0, 0)$ である

$a > \frac{1}{2}$ のとき. $x = \frac{2a-1}{2}$ で最小値 $f\left(\frac{2a-1}{2}\right) = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$

このとき Q は 2個 あり. $\left(\frac{2a-1}{2}, \pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}\right)$

立命館大2021

3



$\omega^5=(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos5\theta+i\sin5\theta=1=\cos0+i\sin0$

$5\theta=2\pi\times n \quad (n=0.1.2.3.4)$

$\theta=\frac{2}{5}\pi n \quad (n=0.1.2.3.4)$

このうち、$\cos\theta>0$、$\sin\theta>0$ を満たすのは $\theta=\frac{2}{5}\pi$ のときのみ.(右図)

$\omega^5=1$ より $\omega^5-1=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

ここで $\omega\neq1$ だから $1+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

また、$x^5-1=0$ の解は $\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^0=1$ の5つだから、

$(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$ …①

$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$ …②

②で $x=\frac{1}{z}$ を代入

$\left(\frac{1}{z}-\omega\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^3\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^4\right)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1$

z^4倍すると、 $(1-\omega z)(1-\omega^2z)(1-\omega^3z)(1-\omega^4z)=1+z+z^2+z^3+z^4$

$z=\alpha$として $(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$

$z=\omega\alpha$ $(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\alpha)=1+\omega\alpha+\omega^2\alpha^2+\omega^3\alpha^3+\omega^4\alpha^4$

$z=\omega^2\alpha$ $(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\alpha)(1-\omega\alpha)=1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega^6\alpha^3+\omega^8\alpha^4=1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega\alpha^3+\omega^3\alpha^4$

$z=\omega^3\alpha$ $(1-\omega^4\alpha)(1-\alpha)(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)=1+\omega^3\alpha+\omega^6\alpha^2+\omega^9\alpha^3+\omega^{12}\alpha^4=1+\omega^3\alpha+\omega\alpha^2+\omega^4\alpha^3+\omega^2\alpha^4$

$z=\omega^4\alpha$ $(1-\alpha)(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)=1+\omega^4\alpha+\omega^8\alpha^2+\omega^{12}\alpha^3+\omega^{16}\alpha^4=1+\omega^4\alpha+\omega^3\alpha^2+\omega^2\alpha^3+\omega\alpha^4$

これらを加えて、

$(1-\omega^1\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)+(1-\omega^1\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^5\alpha)+(1-\omega^1\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)$

$(1-\omega^1\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)+(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)$

$=5+\alpha(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+\alpha^2(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+\alpha^3(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+\alpha^4(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)$

$=5$

①で $x=\frac{1}{z}$ として $\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}-\omega\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^3\right)\left(\frac{1}{z}-\omega^4\right)=\frac{1}{z^5}-1$

z^5倍して $(1-z)(1-z\omega)(1-z\omega^2)(1-z\omega^3)(1-z\omega^4)=1-z^5$

$z=\alpha$を代入 $(1-\alpha)(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)=1-\alpha^5$

$(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)=1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(*)を(**)で辺々を割ると

$\frac{1}{1-\omega\alpha}+\frac{1}{1-\omega^2\alpha}+\frac{1}{1-\omega^3\alpha}+\frac{1}{1-\omega^4\alpha}+\frac{1}{1-\omega^5\alpha}=\frac{5}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}i$

立命館大2021

4 $\lim_{x\to 1-0} T_n(x) = \lim_{\theta\to+0} T_n(\cos\theta) = \lim_{\theta\to+0} \cos n\theta = 1$

$\lim_{x\to 1-0} U_n(x) = \lim_{\theta\to+0} U_n(\cos\theta) = \lim_{\theta\to+0} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin n\theta}{n\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times n\right) = 1\times1\times n = n$

$T_{n+1}(x) = T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$

$= T_n(\cos\theta)\cos\theta - U_n(\cos\theta)\sin^2\theta$

$= T_n(\cos\theta)\cos\theta - U_n(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)$

$\therefore\ T_{n+1}(x) = x T_n(x) - (1-x^2)U_n(x)$ …①

$U_{n+1}(x) = U_{n+1}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}$

$= U_n(\cos\theta)\cos\theta + T_n(\cos\theta) = T_n(x) + x U_n(x)$ …②

② より $T_n(x) = U_{n+1}(x) - x U_n(x)$ を ① に代入

$U_{n+2}(x) - x U_{n+1}(x) = x\left(U_{n+1}(x) - x U_n(x)\right) - (1-x^2)U_n(x)$

$U_{n+2}(x) = 2x U_{n+1}(x) - U_n(x)$ …③

$U_1(x) = U_1(\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$ だから $U_1(x) = 1$

$U_2(x) = U_2(\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x$ だから $U_2(x) = 2x$

$U_3(x) = 2x U_2(x) - U_1(x) = 4x^2 - 1$

$U_4(x) = 2x U_3(x) - U_2(x) = 8x^3 - 2x - 2x = 8x^3 - 4x$

$x^2 = \frac{U_3(x)+1}{4} = \frac{1}{4}U_3(x) + \frac{1}{4}U_1(x)$

$x^3 = \frac{U_4(x)+4x}{8} = \frac{1}{8}U_4(x) + \frac{1}{4}U_2(x)$