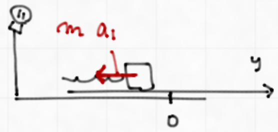
東京大2019

1 I (1) $t=t_1$のとき　　$v(t_1) = a_1 t_1$

$t=t_1+t_2$のとき　　$x(t_1+t_2) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 \times (t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = a_1 t_1 t_2$

(2)

$0 \leqq t \leqq t_1$



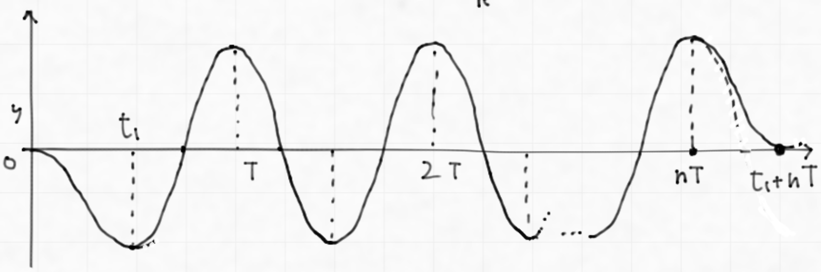
$-y$方向に慣性力 ma_1

力のつりあいを考えて、　$ma_1 = ky_0$　　$y_0 = \frac{ma_1}{k}$

中心 $y = -\frac{ma_1}{k}$、振幅 $\frac{ma_1}{k}$ 周期Tの単振動.

$t_1 < t < nT$　　加速を終えたとき $(t=t_1)$ $y = -\frac{ma_1}{k} \times 2$ だから、$y=0$を中心とし、

振幅 $\frac{2ma_1}{k}$ の単振動を行う



$t = t_1 + t_2$のとき

y座標は 0

台車に対する速度は 0

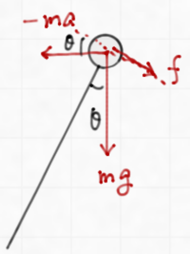
(3) 力のつりあいから振動中心は　$0 \sim \frac{T}{2}$ で $y = -\frac{ma_2}{k}$　　$\frac{T}{2} \sim T$ で $y = \frac{ma_2}{k}$

$t=T$で$y=0$となるのは、半周期前の$t=\frac{T}{2}$のとき、$y = \frac{2ma_2}{k}$ にいないといけない

それは $0 \sim \frac{T}{2}$のときの振幅が $\frac{3ma_2}{k}$ であることを意味し、したがって $t=0$ のとき

$y = -\frac{ma_2}{k} - \frac{3ma_2}{k} = -\frac{4ma_2}{k}$ に位置していたことが分かる.　　$y_0 = -\frac{4ma_2}{k}$ より $a_2 = -\frac{ky_0}{4m}$

II



(1) $f = mg\sin\theta - ma\cos\theta$

(2) 振幅は $\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}$　中心は $\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$ だから

ア ②　　イ ①

$$\theta - \frac{\theta_0+\theta_1}{2} = \frac{\theta_0-\theta_1}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad \therefore\ \theta = \frac{\theta_0-\theta_1}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ より　$F = -m\omega^2 l\left(\theta - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) = -mg\left(\theta - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)$

ウ ⑩

$F=f$より　$-\cancel{m}g\left(\theta - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) = \cancel{m}g\sin\theta - \cancel{m}a\cos\theta$

$-g\theta + \frac{g}{2}(\theta_0+\theta_1) \fallingdotseq g\theta - a$

エ ④　　オ ①

$$a = 2g\theta - \frac{g}{2}(\theta_0+\theta_1) = g(\theta_0-\theta_1)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + g(\theta_0+\theta_1) - \frac{g}{2}(\theta_0+\theta_1) = \left((\theta_0-\theta_1)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)g$$

(i) $v = \int_0^t \left((\theta_0-\theta_1)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)g\,dt = g(\theta_0-\theta_1)\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \frac{\theta_0+\theta_1}{2}gt$

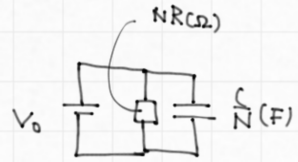
$v_1 = v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\theta_0+\theta_1}{2} \times g \times \frac{T}{2} = \frac{(\theta_0+\theta_1)T}{4}g = \frac{\theta_0+\theta_1}{4}g \times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2}(\theta_1+\theta_2)\sqrt{lg}$

(ii) 振幅は $-\frac{\theta_1}{2}$、中心は $\frac{\theta_1}{2}$　　(i)と同様に　$v_2 = \frac{\pi}{2}\theta_1\sqrt{lg}$

(iii) $v_1 + v_2 = 0$ となるので　$\theta_1 + \theta_2 + \theta_1 = 0$　　$\theta_1 = -\frac{1}{2}\theta_2$

2

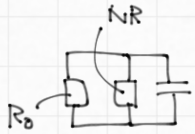
I　$R=\rho\frac{d}{S}$, $C=\varepsilon\frac{S}{d}$



II (1) 素子Xの抵抗値は NR, 容量は $\frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C}+\cdots+\frac{1}{C}}=\frac{C}{N}$

したがって右上図の回路と等価。十分な時間が経ったとき、コンデンサーを流れる電流は0だから

電流 $\frac{V_0}{NR}$　電気量 $\frac{C}{N}V_0$



(2) コンデンサーに蓄えられていたエネルギーは $\frac{1}{2}\frac{C}{N}V_0^2$

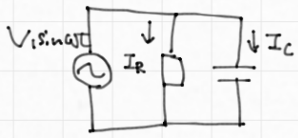
2つの抵抗は並列に接続されており消費電力は電圧Vのときで

$\frac{V^2}{R_0}:\frac{V^2}{NR}$ となり常に $NR:R_0$ の比となっている。したがって R_0 で消費されるエネルギーは

$\frac{1}{2}\frac{C}{N}V_0^2\times\frac{NR}{NR+R_0}=\frac{CRV_0^2}{2(NR+R_0)}$　この値はNが大きくなると分母が大きくなるので単調に減少する　②

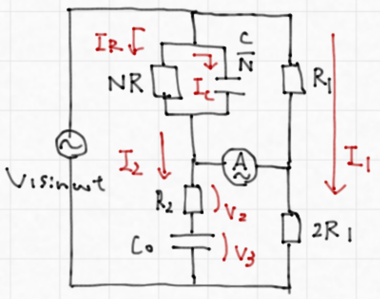
(3) 抵抗を流れる電流の最大値を I_R とすると $I_R NR=V_0$ より $I_R=\frac{V_0}{NR}$

コンデンサーを流れる電流の最大値を I_C とすると $I_C\frac{1}{\omega\frac{C}{N}}=V_0$ より $I_C=\frac{\omega CV_0}{N}$



抵抗を流れる電流は電圧と同位相、コンデンサーでは $\frac{\pi}{2}$ 進んでいるので、

$$I(t)=\frac{V_0}{NR}\sin\omega t+\frac{\omega CV_0}{N}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_0}{N}\left(\frac{1}{R}\sin\omega t+\omega C\cos\omega t\right)$$



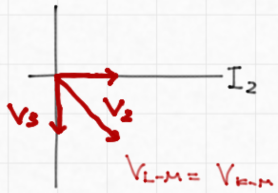
III ア　R_1 と $2R_1$ を流れる電流は等しく、電圧は抵抗に比例する

$$V_{K-M}=\frac{2R_1}{2R_1+R_1}V_1\sin\omega t=\frac{2}{3}V_1\sin\omega t$$

イ.ウ

V_2, V_3 を左のように設定して

$$V_2=I_2R_2\ ,\quad V_3=I_2\frac{1}{\omega C_0}=I_2R_2$$



$$I_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{2}{3}\frac{V_1}{R_2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{V_1}{R_2}\left(\sin\omega t\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\omega t\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{V_1}{3R_2}\sin\omega t+\frac{V_1}{3R_2}\cos\omega t$$

エ　$V_{J-K}=\frac{1}{3}V_1\sin\omega t$

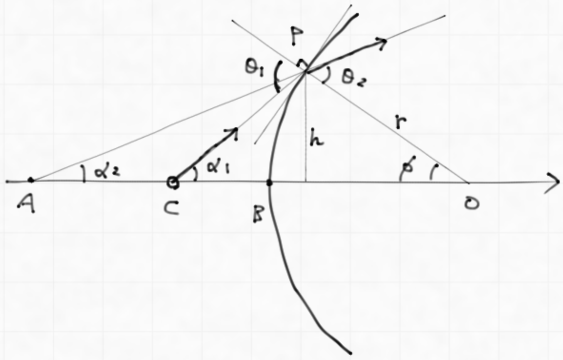
オ.カ　$I_R+I_C=\frac{V_1}{3NR}\sin\omega t+\frac{1}{3}\omega\frac{C}{N}V_1\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_1}{3NR}\sin\omega t+\frac{\omega CV_1}{3N}\cos\omega t$

キ.ク.　$\frac{V_1}{3R_2}\sin\omega t+\frac{V_1}{3R_2}\cos\omega t=\frac{V_1}{3NR}\sin\omega t+\frac{\omega CV_1}{3N}\cos\omega t$

$$R_2=NR=\frac{N}{\omega C}$$

$R_2=\rho\frac{d}{S}N=\frac{N}{\omega}\times\frac{d}{\varepsilon S}$ より　キ $\varepsilon=\frac{Nd}{\omega SR_2}$　ク $\rho=\frac{SR_2}{dN}$

3 Ⅰ



(1) 屈折の法則 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ より $\dfrac{\theta_1}{\theta_2} \fallingdotseq \mathbf{\dfrac{n_2}{n_1}}$

(2) △CPOについて考えて $\theta_1 = \boldsymbol{\alpha_1 + \phi}$

△APO 〃 $\theta_2 = \boldsymbol{\alpha_2 + \phi}$

(3) $\sin\alpha_2 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_2}$, $\sin\alpha_1 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_1}$, $\sin\phi = \dfrac{h}{r}$ より

$\alpha_1 \fallingdotseq \mathbf{\dfrac{h}{x_1}}$, $\alpha_2 \fallingdotseq \mathbf{\dfrac{h}{x_2}}$, $\phi \fallingdotseq \mathbf{\dfrac{h}{r}}$

(4) (1)〜(3)を連立

$$n_1(\alpha_1+\phi) = n_2(\alpha_2+\phi)$$

$$n_1\left(\frac{h}{x_1}+\frac{h}{r}\right) = n_2\left(\frac{h}{x_2}+\frac{h}{r}\right)$$

$$\therefore\ n_1\left(\frac{1}{r}+\mathbf{\frac{1}{x_1}}\right) = n_2\left(\frac{1}{r}+\mathbf{\frac{1}{x_2}}\right)$$

(5) 3-2(A)の場合

$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ より $\dfrac{\theta_1}{\theta_2} \fallingdotseq \dfrac{n_2}{n_1}$

△COPについて $\theta_1 + \alpha_1 = \phi$

△AOPについて $\theta_2 + \alpha_2 = \phi$

$\alpha_1 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_1}$, $\alpha_2 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_2}$, $\phi = \dfrac{h}{r}$

以上を連立して

$$\mathbf{n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_1}\right) = n_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_2}\right)}$$

3-2(B)

同様に $\dfrac{\theta_1}{\theta_2} \fallingdotseq \dfrac{n_2}{n_1}$

△COPについて $\phi + \theta_1 = \alpha_1$

△AOPについて $\phi + \theta_2 = \alpha_2$

$\alpha_1 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_1}$, $\alpha_2 \fallingdotseq \dfrac{h}{x_2}$, $\phi = \dfrac{h}{r}$

以上を連立して

$$\mathbf{n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_1}\right) = n_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_2}\right)}$$

Ⅱ (1) 式(1)で $\dfrac{1}{r}=0$ として $\dfrac{n_1}{x_1} = \dfrac{n_2}{x_2}$ だから、$x_2 = \dfrac{n_2}{n_1}x_1$

よって観測者から光源までの見かけの距離は $\mathbf{L_2 + \dfrac{n_2}{n_1}L_1}$ となる。

(2) (1)と同様に観測者から光源までの見かけの距離は

$$L_2 - d + \frac{n_2}{n_f}\left(d + \frac{n_f}{n_1}L_1\right)$$

これが $L_1 + L_2$ に等しいので、$\dfrac{n_2}{n_1}L_1 - L_1 = d - \dfrac{n_2}{n_f}d$　　$d = \dfrac{\frac{n_2}{n_1}-1}{1-\frac{n_2}{n_f}}L_1 = \mathbf{\dfrac{n_2-n_1}{n_f-n_2}\times\dfrac{n_f}{n_1}L_1}$

$d>0$ だから、$n_2 - n_1 > 0$ かつ $n_f - n_2 > 0$ または $n_2 - n_1 < 0$ かつ $n_f - n_2 < 0$

$\therefore$ $\mathbf{n_1 < n_2 < n_f}$ **または** $\mathbf{n_f < n_2 < n_1}$

(3) (A)だとするとⅠ(4)より $x_2 = 4 - L_2 = 2$ だから

$1.5\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{1}\right) = 1\times\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{2}\right)$ となるが、これを解くと $r = -0.5$ となり成立しない

(B)だとする $r<1$ のとき、(図3-2(A))

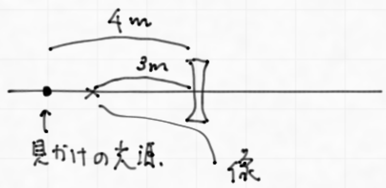
$1.5\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{1}\right) = 1.0\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{2}\right)$ より $r = 0.5 < 1$

よって

$r>1$ のとき、$x_2 < r < 1$ となり成立しない。

球面は **図3-5(B)** で $r = \mathbf{0.5}$

(4)



凸レンズでは、光源の内側に虚像が生じることはないので凹レンズ

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{f}$ より $f = 12$　　**焦点距離12mの凹レンズ**