

$$(1) y = x^3 - x = f(x) \text{ とおく}$$

$f(x) = x(x+1)(x-1)$ だから $f(x) = 0$ となるのは $x = 0, \pm 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1$ だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(x)$ の増減は右のとおり

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$y = f(x)$ のグラフは右のようになる

$$(2) 垂直して, \quad x^3 - x = ax + b \Leftrightarrow x^3 - x - ax - b = 0$$

上式 左辺を $g(x)$ とおく.

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - a$$

$$g'(x) = 0 \text{ となるのは } x^2 = \frac{1+a}{3} \text{ のときで}.$$

$1+a \leq 0$ のとき $g'(x) = 0$ となる x は存在せず, $g(x)$ は

単調に増加する. このとき $g(x) = 0$ の解は 1 つ以下であり, 題意は満たさない.

$1+a > 0$ のとき, $x = \pm \sqrt{\frac{1+a}{3}}$ のとき, $g'(x) = 0$ であり, $\sqrt{\frac{1+a}{3}} = a$ として.

$g(x)$ の増減は右のようになる

$$g(x) = g'(x) \times \frac{1}{3}x - \frac{2(1+a)}{3}x - b$$

$g(x) = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつときに題意は

成り立つが, このための条件は $y = g(x)$ が x 軸と 3 度で交わ

ることで. このために $g(-a) > 0$, $g(a) < 0$ が成り立つことは既に

$$g(-a) = +\frac{2}{3}(1+a)\sqrt{\frac{1+a}{3}} - b > 0, \quad g(a) = -\frac{2}{3}(1+a)\sqrt{\frac{1+a}{3}} - b < 0$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}(1+a)^{\frac{3}{2}} < b < \frac{2}{3\sqrt{3}}(1+a)^{\frac{3}{2}}, (a > -1)$$

$$\text{以上より}, \quad b = < \frac{4}{27}(1+a)^{\frac{3}{2}}, \quad a > -1$$

$$(3) g(x) \text{ が極大となるのは } x = -a < 0,$$

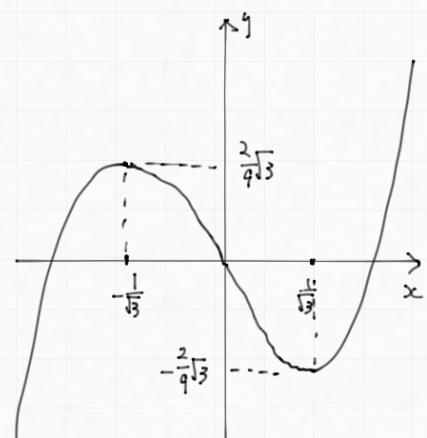
極小となるのは $x = a > 0$ だから, $y = g(x)$ が

右図のようだ. $x < 0$ の範囲で x 軸と 2 度, $x > 0$ の

範囲で 1 度交わるための条件は, (2) の条件に $g(0) < 0$ を併せたもので

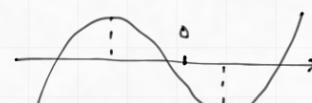
$$g(0) = -b < 0 \Leftrightarrow b > 0. \quad \therefore 0 < b < \frac{2\sqrt{3}}{9}(1+a)^{\frac{3}{2}}, \quad a > -1$$

x	$\dots -\frac{1}{\sqrt{3}} \dots \frac{1}{\sqrt{3}} \dots$
$f(x)$	$+ 0 - 0 +$
$f'(x)$	$\nearrow \searrow \nearrow$



x	$\dots -a \dots a \dots$
$g'(x)$	$+ 0 - 0 +$
$g(x)$	$\nearrow \searrow \nearrow$

$$\begin{array}{r} & & & \frac{1}{3} \\ & & & \hline 3 & 0 & -1-a & | & 1 & 0 & -1-a & -b \\ & & & \hline & 1 & 0 & -\frac{1+a}{3} & & & & \\ & & & \hline & & & \frac{2(1+a)}{3} & -b & & & \end{array}$$



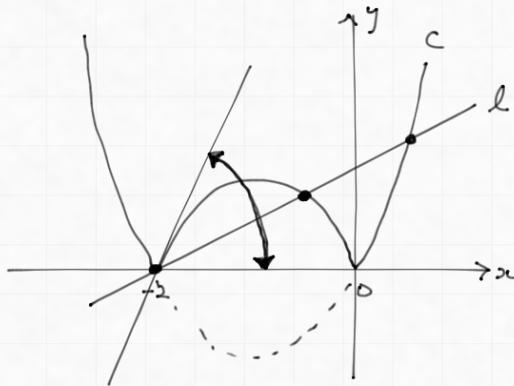
2

$$C: y = |x(x+2)|$$

$$l: y = k(x+2)$$

(1) C, l のグラフは右のようになる。

l と C が 3 点で交わるのは右図中の

範囲に l があるとき。 $y = -x(x+2)$ の $x = -2$ における傾きは $y' = -2x - 2$ だから $-2(-2) - 2 = 2$ よって k の範囲は $0 < k < 2$ 

$$(2) -x^2 - 2x = k(x+2) \text{ のとき}, x = -2, -k.$$

$$x^2 + 2x = k(x+2) \text{ のとき} \quad x = -2, -k$$

$$x = -2, -k, k$$

(3) もとの面積を S とする

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-k} -x(x+2) - k(x+2) dx + \int_{-k}^0 -x(x+2) - k(x+2) dx + \int_0^k x(x+2) - k(x+2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-k)^3 + \frac{1}{6}(k+2)^3 - \frac{1}{6}(0+2)^3 - \left\{ \frac{1}{6}(0+2)^3 - \frac{1}{6}(2-k)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2-k)^3 + \frac{1}{6}(k+2)^3 - \frac{8}{3} = -\frac{1}{6}k^3 + 3k^2 - 2k + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dk} = -\frac{1}{2}k^2 + 6k - 2 = -\frac{1}{2}(k^2 - 12k + 4)$$

$$\frac{dS}{dk} = 0 \text{ となるのは} \quad k = 6 - 4\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 2)$$

k	0	\cdots	$6 - 4\sqrt{2}$	\cdots	2
$\frac{dS}{dk}$	+	-	0	+	
S	↑			↑	

$$k = 6 - 4\sqrt{2} \text{ のとき} \quad S = \frac{1}{3}(-4+4\sqrt{2})^3 + \frac{1}{6}(8-4\sqrt{2})^3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(124 - 128\sqrt{2})$$

$$k = 6 - 4\sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{dS}{dk} \text{ 小} \quad \frac{1}{3}(124 - 128\sqrt{2}) \text{ となる}$$

3

(1) $AC \parallel GD$ だから $\angle CAD = \angle ADG$ (錯角)

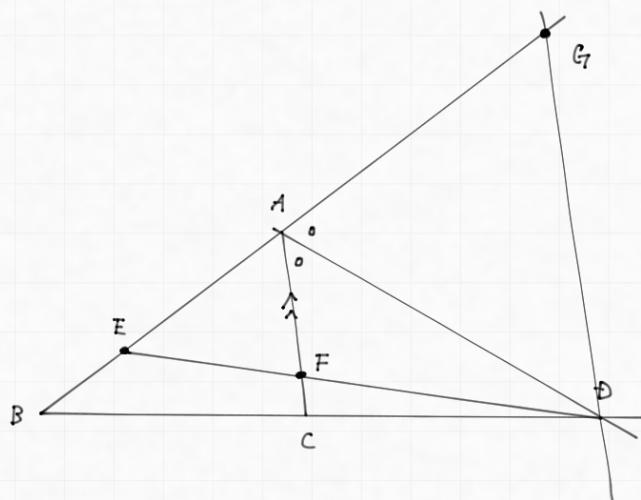
AD は $\angle CAG$ の二等分線だから

$$\angle CAD = \angle GAD$$

よって $\angle GAD = \angle GDA$ であり

$\triangle GAD$ は $AD = GD$ の二等辺三角形

証明終



(2) $AC \parallel GD$, $\angle B$ 共通だから

$\triangle BAC \sim \triangle BGD$ であり。

$$AB : AC = BG : GD \Leftrightarrow AB : AC = AB + AG : AG \quad (\because AG = GD)$$

$$AC \cdot AB + AC \cdot AG = AB \cdot AG$$

$$AG = \frac{AB \cdot AC}{AB - AC}$$

$$AB : BC = BG : BD \text{ より } AB : DB - DC = AB + \frac{AB \cdot AC}{AB - AC} : DB$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot DB - AB \cdot DC + \frac{AB \cdot AC}{AB - AC} (DB - DC) = AB \cdot DB$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot DC - AB \cdot DC \cdot \cancel{AC} = AB \cdot AC \cdot DB - AB \cdot AC \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

証明終

(3) Xネラウスの定理より $\frac{BD}{DC} \times \frac{CF}{FA} \times \frac{AE}{EB} = 1$

$$\frac{AB}{AC} \times \frac{CF}{FA} \times \frac{t \cdot AB}{AB - t \cdot AB} = 1$$

$$\frac{CF}{FA} = \frac{1-t}{t} \times \frac{b}{c}$$

$$AF = AC \times \frac{AF}{AF+FC} = b \times \frac{1}{1 + \frac{CF}{FA}} = b \times \frac{1}{1 + \frac{b(1-t)}{ct}} = b \times \frac{ct}{ct + b - bt}$$

$$AF = \frac{bct}{(c-b)t + b}$$

4

(1) $X=1$ となるのは $a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ かつ $a_3 = b_3$ のとき。

$$1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

(2) $X=2$ となるのは。(i) くり上がりがないとき ($b_1 = 2a_1$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 2a_3$) $b_1 = 2a_1$ となるのは $(a, b_1) = (1, 2), (2, 4), (3, 6)$ の 3通り。 $b_2 = 2a_2$ や $b_3 = 2a_3$ も同様なので 3³通り

(ii) くり上がりがあるとき。

 $(10a_2 + a_3) \geq 2^3$ すなはちくり上がりがあるのは

~~15, 16, 25, 26, 35, 36, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66
 2倍17, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62~~

 $10a_2 + a_3 = 16, 26$ のとき。 $2a_1 = b_1$ となるのは 3通り。 $10a_2 + a_3 = 56, 61, 62, 63, 66$ のとき。 $b_1 = 2a_1 + 1$ となるのは。 $(a, b_1) = (1, 3), (2, 5)$

$$2 \times 3 + 5 \times 2 = 16$$
 通り。

$$\text{以上より。もとめる確率} = \frac{3^3 + 16}{6^6} = \frac{43}{46656}$$

(3) $100b_1 + 10b_2 + b_3 = B$, $100a_1 + 10a_2 + a_3 = A$ とあく $B > A$ となる確率と $B < A$ となる確率は等しい。 $A = B$ となる確率は (1) より $\frac{1}{216}$ だから、もとめる確率は

$$(1 - \frac{1}{216}) \times \frac{1}{2} = \frac{215}{432}$$

5. (1) いかにも、合式は全て5を法とするものとする

a, b, c が全て5の倍数でないと仮定する

$$n \equiv 1 \text{ のとき } n^2 \equiv 1, \quad n \equiv 2 \text{ のとき, } n^2 \equiv 4, \quad n \equiv 3 \text{ のとき, } n^2 \equiv 9 \equiv 4, \quad n \equiv 4 \text{ のとき } n^2 \equiv 16 \equiv 1$$

したがって a, b のいずれかが5の倍数でないとす。 $a^2 + b^2$ を5で割った余りは。

$$1+1, \quad 1+4, \quad 4+4$$

のいずれかである。

ところが c が5の倍数でないとき $c^2 \equiv 1$ または4だから $a^2 + b^2 \equiv c^2$ となる。 a, b, c は存在しない

よって a, b, c のうち2つは5の倍数である。

(2) p は5以上の素数だから奇数。

$$p^2 - 1 = (p+1)(p-1) \dots \textcircled{1}$$

と表形できますが、 p が奇数だから $p+1, p-1$ はいずれも偶数であり、 $\textcircled{1}$ は偶数
 p は素数だから3で割り切れないので p で3で割った余りは1または2。

$$p \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } p-1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ だから } \textcircled{1} \text{ は3の倍数}$$

$$p \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } p+1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3} \text{ だから } \textcircled{1} \text{ は3の倍数}.$$

よって $\textcircled{1}$ は3の倍数かつ偶数であり、すなはち6の倍数である。

(3) (1)について $p+1, p-1$ はいずれも偶数であり、かつ、その差が2だから連続した偶数。

したがって $p+1$ と $p-1$ のいずれかが一方は4の倍数であり、 $\textcircled{1}$ は8の倍数

(2)で示したように $\textcircled{1}$ は3の倍数でもあるので、 $\textcircled{1}$ は24の倍数

よって $p^2 - 1$ は24の倍数。