滋賀医科大学2022

1 (1) $\{b_n\}$の一般項は $b_n = 1\times(-t)^{n-1} = (-t)^{n-1}$

(i) a_{n+2} が a_n と a_{n+1} の間にあるとき、$a_{n+2}-a_n$ と $a_{n+2}-a_{n+1}$ は異符号となっている

$$(a_{n+2}-a_n)\times(a_{n+2}-a_{n+1})$$
$$=(a_{n+1}+b_{n+1}-a_n)\times(a_{n+1}+b_{n+1}-a_{n+1})$$
$$=(b_{n+1}+b_n)\times b_{n+1}$$
$$=\{(-t)^n+(-t)^{n-1}\}\times(-t)^n$$
$$=(-t)^{2n-1}(-t+1)$$
$$=t^{2n-1}(1-t)(-t)<0 \qquad (\because\ 0<t<1)$$

よって $a_{n+2}-a_n$ と $a_{n+2}-a_{n+1}$ は異符号であり、a_{n+2} は a_n と a_{n+1} の間にある。

(ii) $a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k = 1\times\dfrac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}$ $(n\geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}=\frac{1}{1+t}$$

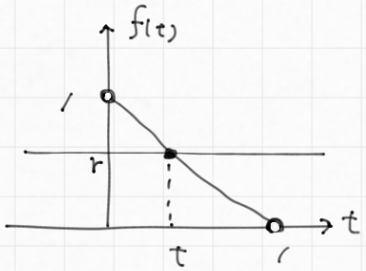
(iii) $f(t)=\dfrac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}$ とおく。n が3以上の奇数のとき、

$$f(t)=\frac{1-t^{n-1}}{1+t}$$
$$f'(t)=\frac{-(n-1)t^{n-2}(1+t)-(1-t^{n-1})}{(1+t)^2}<0 \qquad (\because\ n-1>0,\ 1+t>0,\ 1-t^{n-1}>0)$$

$\lim_{t\to+0}f(t)=\frac{1}{1}=1$, $\lim_{t\to1-0}\dfrac{1-t^{n-1}}{1+t}=\dfrac{0}{2}=0$ だから

$f(t)$のグラフは右のようになっており、

$0<r<1$のとき、$f(t)=r$ となる t がただ1つ存在する

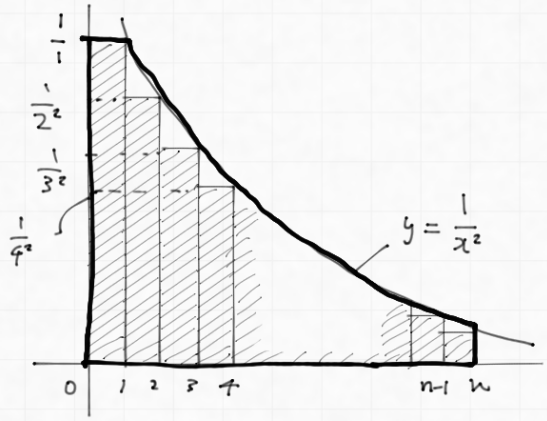


(2) ±1で振動し、ともに外側から近付くような数列を考える。

$$c_n=(-1)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$c_1=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$ $\quad c_2=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$ $\quad c_3=-1-\frac{1}{16}=-\frac{17}{16}$ $\quad c_4=1+\frac{1}{32}=\frac{33}{32}$

2 (1) 右図の太枠部の面積 > 斜線部の面積



$$\int_1^n \frac{1}{x^2}dx+1 > \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \left[-x^{-1}\right]_1^n+1 = -\frac{1}{n}+2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{n}$$ が示された。

(2) $f(x)=\frac{x^2}{2}-(1-\cos x)$ とおく

$f'(x)=x-\sin x$

$f''(x)=1-\cos x \geqq 0$

$x\geqq 0$ で $f''(x)\geqq 0$ であり、$f'(x)$ は単調に増加する。

つまり $x\geqq 0$ で $f'(x)\geqq f'(0)=0-\sin 0=0$

これは $f(x)$ が $x\geqq 0$ で常に0以上であることを示しており、$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

$f(0)=0-1+1=0$ だから、 $f(x)\geqq f(0)=0$

$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ であり、これは $x\geqq 0$ で $1-\cos x \leqq \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示している

$1-\cos x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=g(x)$ とおく

$g'(x)=\frac{x^3}{6}-x+\sin x$ $\quad g''(x)=\frac{1}{2}x^2-1+\cos x=f(x)$

$x\geqq 0$ で $f(x)\geqq 0$ だから $g''(x)\geqq 0$ であり $g'(x)$ は単調に増加する。 よって $g'(x)\geqq g'(0)=0$

$g'(x)\geqq 0$ だから $x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に増加する。 よって $g(x)\geqq g(0)=1-1=0$

$x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$ であり これは $x\geqq 0$ で $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\leqq 1-\cos x$ が成り立つ

(3) (2) において $x=\frac{1}{k}$ とすると

$$\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{24k^4}\leqq 1-\cos\frac{1}{k}\leqq\frac{1}{2k^2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{24k^2}\leqq k^2-k^2\cos\frac{1}{k}\leqq\frac{1}{2}$$

上の不等式で $k=1\sim n$ まで代入したものを全て加える。

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24k^2}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k^2\cos\frac{1}{k}\right)\leqq\frac{1}{2}n$$

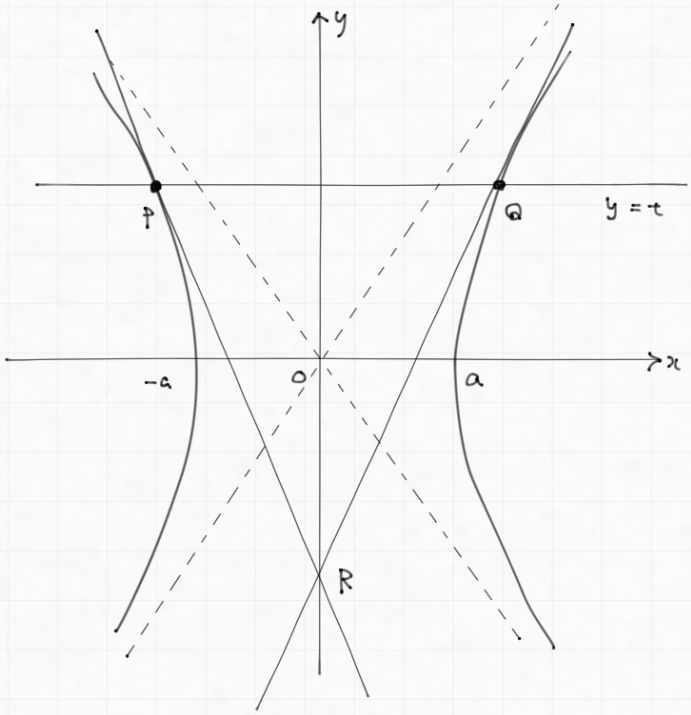
n で割る

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24k^2}\right)\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k^2\cos\frac{1}{k}\right)\leqq\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24k^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{24n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{24n}\left(2-\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\quad\cdots②$$

①、② より、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k^2\cos\frac{1}{k}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$

3



(1) $y=t$ と双曲線の交点は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1$$

$$x=\pm a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}t^2}$$

対称性から、RはPにおける接線とy軸との交点

$\left(a\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ における接線は

$$\frac{a\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}}\,x}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

①とy軸との交点は　$0-\frac{ty}{b^2}=1$　$y=-\frac{b^2}{t}$

$$\mathbf{R\left(0,\ -\frac{b^2}{t}\right)}$$

(2) PQを底辺として考える

$$S=\frac{1}{2}\ 2a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}t^2}\times\left|t+\frac{b^2}{t}\right| = \mathbf{a\left|t+\frac{b^2}{t}\right|\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}}}$$

(3) $S=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{|t|}(t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}$ と変形できる。これは偶関数だから、$t\geqq 0$ の範囲に限定し、

$f(t)=\frac{1}{t}(t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}$ とおくと

$$f'(t)=\frac{\frac{3}{\cancel{2}}(t^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\times\cancel{2}t\times t-(t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{t^2}=\frac{3t^4+3b^2t^2-t^4-b^4-2b^2t^2}{t^2\sqrt{t^2+b^2}}=\frac{2t^4+b^2t^2-b^4}{t^2\sqrt{t^2+b^2}}=\frac{(2t^2-b^2)(t^2+b^2)}{t^2\sqrt{t^2+b^2}}$$

$f'(t)=0$ となるのは $t=\frac{b}{\sqrt{2}}$ のとき。

$f(t)$ の増減は下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$
$f(t)$	/	↘		↗

$$f\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\left(\frac{3}{2}b^2\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$$

よって S は $t=\frac{b}{\sqrt{2}}$ または $-\frac{b}{\sqrt{2}}$ のとき最小となり、最小値は $\frac{a}{b}f\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}ab}$

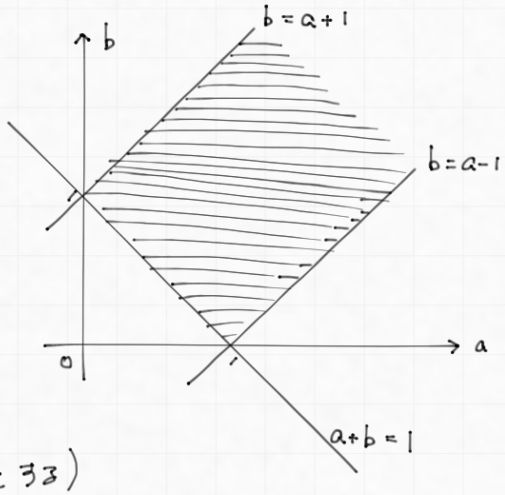
4

(1) a, b は辺の長さだから $a>0, b>0$

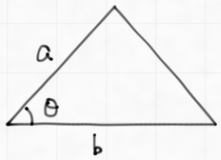
また、三角形の成立条件より

$$\begin{cases} 1 < a+b \\ a < b+1 \\ b < 1+a \end{cases}$$

右図斜線部(境界除く)



(2)



左のように、狭角を θ とする ($0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ とする)

面積が1だから $\frac{1}{2}ab\sin\theta = 1 \iff ab = \frac{2}{\sin\theta}$

$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $0<\sin\theta\leqq 1$ だから

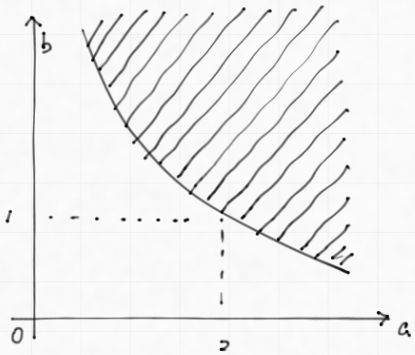
$$ab \geqq \frac{2}{1} = 2$$

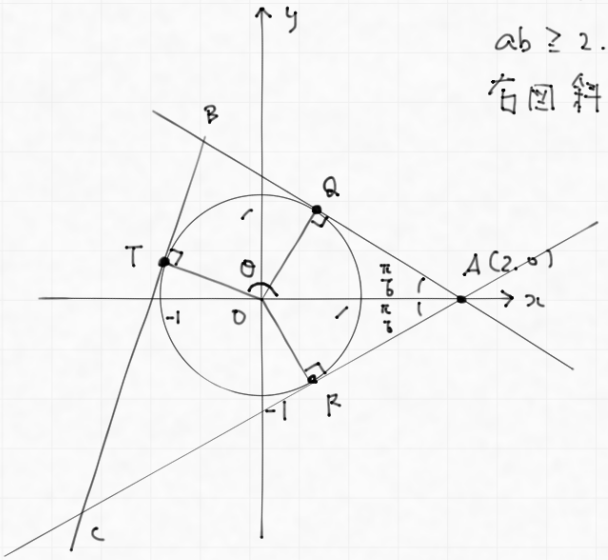
a, b は辺の長さだから $a>0, b>0$.

以上より、条件は

$ab \geqq 2,\ a>0,\ b>0$

右図斜線部(境界含む)





(3) 左のように AB, AC, BC と円の接点を Q, R, T とおくと、$OQ=1$, $AO=2$, $\angle OQA=\frac{\pi}{2}$ より、

$\triangle OAQ$ は $\angle OAQ=\frac{\pi}{6}$ の直角三角形

(同様に $\triangle OAR$ も $\angle OAR=\frac{\pi}{6}$ の直角三角形)

まず、接点Tの存在範囲を考える。$\triangle ABC$ は円を含むので

Tは優弧QR上に存在する ($\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$)

BCが半直線ACと交わるための条件は BCの傾きが

ACの傾きよりも大きいこと BCの傾きは左図中の

θ を用いて $\theta-\frac{\pi}{2}$ だから

$$\theta-\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{6} \iff \theta > \frac{2}{3}\pi$$

同様に BCの傾きは ABの傾きよりも小さく

$$\theta-\frac{\pi}{2} < \frac{5}{6}\pi \iff \theta < \frac{4}{3}\pi$$

以上より θ の範囲は $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$ で Tは円周上の

この範囲の点を動く

Tを接点とした接線で、ARとAQの間の範囲が線分BCで、その通過領域は左図の斜線部となる

境界は太線部のみ含まれる