大阪公立大2022中期

1 (1) $x_n = n^3 y_n$, $x_{n+1} = (n+1)^3 y_{n+1}$ を漸化式に代入

$$n^3(n+1)^3 y_{n+1} = (n+1)^3 n^3 y_n - cn^2(n+1)^2$$

$$y_{n+1} = y_n - c\frac{1}{n(n+1)}$$

$$= y_n - c\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$n \geqq 2$ のとき.

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-c\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\} = \frac{x_1}{1^3} - c\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} - c + \frac{c}{n} \quad (n \geqq 2)$$

ここで $n=1$ とすると $y_1 = \frac{1}{3}$ となるので上式は $n=1$ でも成立する.

よって $\{y_n\}$ の一般項は $\mathbf{y_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)c + \frac{1}{3}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{n} - c + \frac{1}{3}\right) = -c + \frac{1}{3}$

これが 0 となるのは $\mathbf{c = \frac{1}{3}}$ のとき

(3) $c = \frac{1}{3}$ のとき. $y_n = \frac{1}{3n}$, $x_n = \frac{n^3}{3n} = \frac{1}{3}n^2$

$a_n = \sin\left(\frac{3}{4}\pi x_n\right)$ とおく.

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$$

$n = 2k-1$ のとき. (k は自然数)

$$a_{2k-1} = \sin\left\{\frac{\pi}{4}(4k^2 - 4k + 1)\right\} = \sin\left\{k(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$$

ここで $k(k-1)$ は連続した整数の積だから偶数.

したがって $a_{2k-1} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n = 2k$ のとき. (k は自然数)

$$a_{2k} = \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 4k^2\right) = \sin(\pi k^2) = 0$$

$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{3}{4}\pi x_n\right)$ とおくと

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$$

$N = 2M$ のとき. $S_{2M} = \sum_{n=1}^{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} a_{2n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} a_{2n}\right\}$

$$= \sum_{n=1}^{M}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1 - \frac{1}{4^M}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^M}\right)$$

$N = 2M-1$ のとき. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2M} a_{2M} = 0$ だから $S_{2M-1} = S_{2M}$

$\lim_{M\to\infty} S_{2M} = \lim_{M\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^M}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} = \lim_{M\to\infty} S_{2M-1}$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{3}{4}\pi x_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

2

(1) 1,2,3の目が出る事象を → 4,5の目が出る事象を ← 6の目が出る事象を ● と表す.

n回で終了するのは n回全て→ または n回全て←

$$P(n) = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{3^n+2^n}{6^n}$$

(2) n+1回で終了するのは n回→と1回● または n回←と1回●

ただし、最後が●のものは除く.

$$P(n+1) = \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right){}_nC_1 \times \frac{3}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{6}\right) \times {}_nC_1 \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{n(3^n+2^n)}{6^{n+1}}$$

(3) (i) → $\times n$, ● $\times 2$

(ii) ← $\times n$, ● $\times 2$

(iii) → $\times (n+1)$, ← $\times 1$

(iv) ← $\times (n+1)$, → $\times 1$

ただし

n+1回目, n回目で終わるものを除く

(i) $\left(\frac{3}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left({}_{n+2}C_2 - 1 - {}_nC_1\right) = \frac{3^n}{6^{n+2}}\left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 - n\right) = \frac{3^n}{2\cdot 6^{n+2}}\left(n^2+n\right)$

(ii) $\left(\frac{2}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)^2\left({}_{n+2}C_2 - 1 - {}_nC_1\right) = \frac{2^n}{2\cdot 6^{n+2}}\left(n^2+n\right)$

(iii) $\left(\frac{3}{6}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{6}\right)^1\left({}_{n+2}C_1 - 2\right) = \frac{2\cdot 3^{n+1}}{6^{n+2}} \times n$

(iv) $\left(\frac{2}{6}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{6}\right)\left({}_{n+2}C_1 - 2\right) = \frac{3\cdot 2^{n+1}}{6^{n+2}} n$

$$P(n+2) = \frac{1}{2\cdot 6^{n+2}}\left\{3^n\left(n^2+n+12n\right) + 2^n\left(n^2+n+12n\right)\right\}$$

$$= \frac{(n^2+13n)(3^n+2^n)}{2\cdot 6^{n+2}}$$

3

(1) $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x - 2t\sin x\cos 2nx + t^2\cos^2 2nx \, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1-\cos 2x \, dx - t\int_0^{\pi} \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x \, dx + \frac{1}{2}t^2\int_0^{\pi} 1+\cos 4nx \, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} + t\left[\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]_0^{\pi}$

$+ \frac{1}{2}t^2\left[x + \frac{1}{4n}\sin 4nx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\pi + t\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2}t^2(\pi + 0)$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi t^2 + \frac{4}{4n^2-1}t + \frac{1}{2}\pi}$

(2) $I = \frac{1}{2}\pi\left(t + \frac{4}{(4n^2-1)\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi - \frac{8}{(4n^2-1)^2\pi}$

$\boldsymbol{t = -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}}$ のとき I は最小となる

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{4}{(4k^2-1)\pi}\right\}$ とおく　　$1+2k$　$+1-2k$

$S_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k)(1-2k)} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{-3}} + \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\cancel{-\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{1-2n}} + \frac{1}{1+2n}\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} - 1\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{-\frac{2}{\pi}}$

4 (1) $f(x)=x^{-x}$ について、$x>0$ のとき正なのは明らかだから

両辺の自然対数をとる

$$\log f(x) = -x\log x$$

x で微分

$$\frac{1}{f(x)}\times f'(x) = -\log x - x\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \mathbf{-x^{-x}(\log x+1)}$$

(2) $f'(x)=0$ となるのは $\log x+1=0$ すなわち $x=\frac{1}{e}$

のときで、$f(x)$ の増減は右のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	+	0	−
$f(x)$	/	↗		↘

したがって $f(x)$ は $x=\frac{1}{e}$ のとき最大となり、その値は

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$$

(3) $f''(x) = -f'(x)(\log x+1) - f(x)\times\frac{1}{x} = x^{-x}(\log x+1)^2 - \frac{1}{x}x^{-x}$

$$g(x) = \frac{x\cdot x^{-x}(\log x+1)^2 - x^{-x}}{x^{-x}} = \mathbf{x(\log x+1)^2-1}$$

(4) $g'(x) = (\log x+1)^2 + x\times 2(\log x+1)\times\frac{1}{x} = (\log x+1)(\log x+3)$

$g'(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}$

$g(x)$ の増減は右のとおり

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	−	0	+
$g(x)$		↗		↘		↗

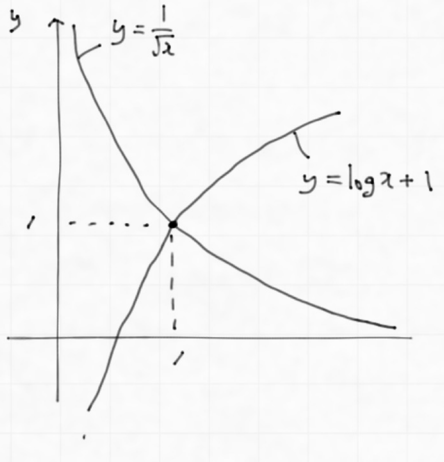
$x=\mathbf{\frac{1}{e^2}}$ のとき 極大値 $g\left(\frac{1}{e^3}\right) = \mathbf{\frac{4}{e^3}-1}$

(5) $x=\mathbf{\frac{1}{e}}$ のとき 極小値 $g\left(\frac{1}{e}\right) = \mathbf{-1}$

(6) $f''(x) = x^{-x}\left\{(\log x+1)^2 - \frac{1}{x}\right\}$

$f''(x)=0$ となるのは $(\log x+1)^2 = \frac{1}{x}$ のとき.

両辺の平方根をとって $\log x+1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$



$y=\log x+1$ および $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフは右のように

なっており $x>0$ で $y=\log x+1$ は単調に増加し.

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ は単調に減少する. したがって この2つのグラフ

が交わるのは $x=1$ のときのみで. $x=1$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるので.

変曲点のx座標は $\mathbf{x=1}$ である

5 $h(x) = \dfrac{ax^2+(2-a)x+a}{x^2+1}$

(1) $h'(x) = \dfrac{(2ax+2-a)(x^2+1)-(ax^2+2x-ax+a)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(a-2)(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$h'(x)=0$ を解くと $x=\pm 1$

$h(x)$ の増減は右のようになり、

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=1$ で極小となり、その値は $h(1) = \dfrac{2+a}{2}$

(2) $a<2$ のとき、

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$x=-1$ で極小となり、

$h(-1) = \dfrac{3a-2}{2}$

(3) $a>2$ のとき、$\dfrac{2+a}{2}>1 \iff a>0 \quad \therefore a>2$

$a<2$ 〃 $\dfrac{3a-2}{2}>1 \iff a>\dfrac{4}{3} \quad \therefore \dfrac{4}{3}<a<2$

$\dfrac{4}{3}<a<2,\ a>2$

(4) $y=h(x)$ 上の点 $(t, h(t))$ における接線は

$$y = \frac{(a-2)(t^2-1)}{(t^2+1)^2}(x-t) + \frac{at^2+(2-a)t+a}{t^2+1}$$

これが原点を通るとき、

$$0 = \frac{(a-2)(t^2-1)(-t)}{(t^2+1)^2} + \frac{at^2+(2-a)t+a}{t^2+1}$$

$$(a-2)(t^2-1)(-t) + (at^2+(2-a)t+a)(t^2+1) = 0$$

$$-at^3+\cancel{at}+2t^3\cancel{-2t}+at^4+at^2+2t^3-at^3\cancel{+2t}\cancel{-at}+at^2+a=0$$

$$at^4+2(2-a)t^3+2at^2+a=0$$

$$-a(t^4-2t^3+2t^2+1) = 4t^3 \quad \cdots ①$$

$t=0$ のとき、(3)のとき $a\neq 0$ だから ① は成立しない。

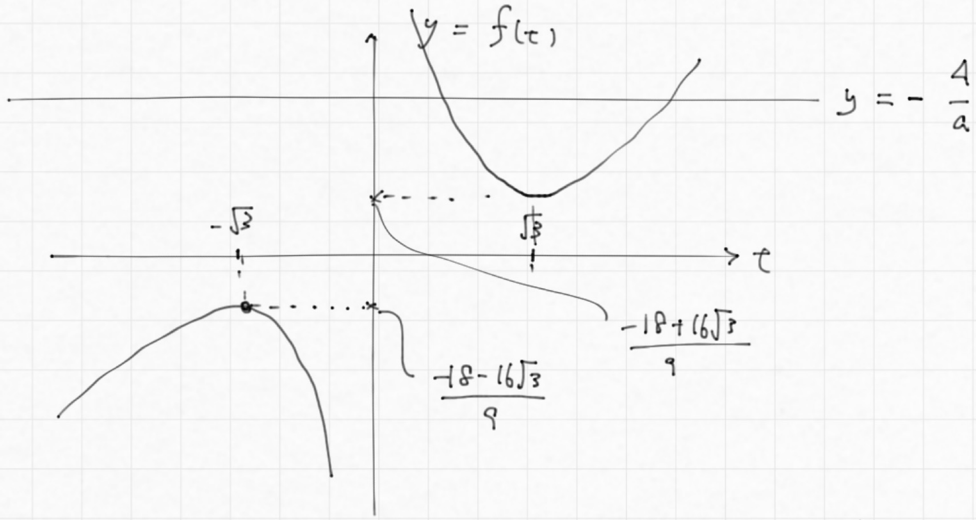
$t\neq 0$ のとき、① は $-\dfrac{4}{a} = \dfrac{t^4-2t^3+2t^2+1}{t^3}$ ($=f(t)$ とおく)

$$f'(t) = \frac{(4t^3-6t^2+4t)t^3-3t^2(t^4-2t^3+2t^2+1)}{t^6} = \frac{t^4-2t^2-3}{t^4} = \frac{(t^2-3)(t^2+1)}{t^4}$$

$f(t)$ の増減は次のとおり

t	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$	/	$\searrow$		$\nearrow$

$f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{18+16\sqrt{3}}{9}$, $f(\sqrt{3}) = \dfrac{16\sqrt{3}-18}{9}$



(3) より　$\frac{4}{3}<a<2,\ a>2$ のとき．　$\frac{1}{2}<\frac{1}{a}<\frac{3}{4},\ \frac{1}{a}<\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\ 2<\frac{4}{a}<3,\ \frac{4}{a}<2\ \Leftrightarrow\ -3<-\frac{4}{a}<-2,\ 0>-\frac{4}{a}>-2$$

$\frac{-18-16\sqrt{3}}{9}<-3,\ \frac{-18+16\sqrt{3}}{9}>0$ だから $y=f(t)$ と $y=-\frac{4}{a}$ は交点を持たない．

以上より **$m=0$**

(4)　$h(x)-a=\frac{(2-a)x}{x^2+1}$

$|h(x)-a|=g(x)$ とおくと $g(-x)=\left|\frac{(a-2)x}{x^2+1}\right|=\left|\frac{(2-a)x}{x^2+1}\right|=g(x)$ だから $g(x)$ は偶関数．

したがって　$\int_{-t^a}^{t^a}g(x)dx=2\int_0^{t^a}g(x)dx=2\int_0^{t^a}\frac{|2-a|x}{x^2+1}dx$

$$=|2-a|\int_0^{t^a}\frac{2x}{x^2+1}dx=|2-a|\left[\log|x^2+1|\right]_0^{t^a}=|2-a|\log(t^{2a}+1)$$

$$\lim_{t\to+0}t^{-b}\int_{-t^a}^{t^a}|h(x)-a|dx=\lim_{t\to+0}\frac{|2-a|\log(t^{2a}+1)}{t^b}=\lim_{t\to+0}\left\{|2-a|\frac{\log(1+t^{2a})}{t^{2a}}\cdot t^{2a-b}\right\}$$

ここで $\lim_{t\to+0}\frac{\log(1+t^{2a})}{t^{2a}}=1$ だから上式が0以外の値に収束するのは t^{2a-b} が1のとき．

すなわち $2a-b=0$ のときに限られる

このとき．

$$\lim_{t\to+0}\left\{|2-a|\frac{\log(1+t^{2a})}{t^{2a}}\right\}=|2-a|=\frac{b}{3}=\frac{2}{3}a$$

$2-a=\pm\frac{2}{3}a$　より　$a=\frac{6}{5},\ 6$

このうち(3)の条件を満たすのは $a=6$　　　$\therefore$　$(a,b)=$ **$(6,12)$**