三重大学2021 生物資源

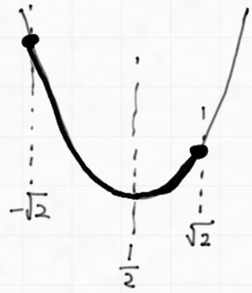
1 (2) $\sin x+\cos x=t$ とおく。

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ だから $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x \iff \sin 2x=t^2-1$

よって $y=\sin 2x-\sin x-\cos x=t^2-1-t$

$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\quad(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$



yが最大となるのは $t=-\sqrt{2}$ のとき $y=(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-1=\mathbf{\sqrt{2}+1}$

yが最小となるのは $t=\frac{1}{2}$ のとき。 $y=\mathbf{-\frac{5}{4}}$

(5) 赤玉 ④ ⑧ ⑫ …… ⑳⓪ 50個

白玉 1, 2, 3, …… 100 100個

(i) 100以下の赤玉を引いたとき。

④ⓚ の玉を引いたとする ($1\leqq k\leqq 25$)

このとき赤玉の数が白玉の数より大きくなるのは白球の数が $1\sim 4k-1$ のときで、

その組み合わせの総数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}(4k-1)=\frac{3+99}{2}\times 25=1275$ 通り

(ii) 100より大きい赤玉を引いたとき、

必ず赤玉の数が白玉の数を上回る。 $25\times 100=2500$ 通り

(i)(ii)より、もとめる確率は $\dfrac{1275+2500}{50\times 100}=\dfrac{51+100}{200}=\mathbf{\dfrac{151}{200}}$

(別解)

赤玉

白玉	4	8	12	16	…	100	104	…	200	個数
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
4		○	○	○	○	○	○	○	○	49
5		○	○	○	○	○	○	○	○	49
6		○	○	○	○	○	○	○	○	49
7		○	○	○	○	○	○	○	○	49
8			○	○	○	○	○	○	○	48
9			○	○	○	○	○	○	○	48
⋮					⋱	○	○	○	○	⋮
99						○	○	○	○	26
100							○	○	○	25
個数	3	7	11	15	…	99	100	100	100	

$3+7+11+\cdots+99+100\times 25$

$=1275+2500$

$\therefore\ \dfrac{1275+2500}{50\times 100}=\mathbf{\dfrac{151}{200}}$

または、

$50\times 3+49\times 4+48\times 4+\cdots+26\times 4+25$

$=(26+27+\cdots+50)\times 4-50+25$

$=\dfrac{26+50}{2}\times 25\times 4-25=3800-25=3775$

以下同じ。

三重大学2021 生物資源

1 (6) 相加平均 $=\dfrac{a+b}{2}$　　相乗平均 $\sqrt{ab}$ はいずれも正の値をとるので平方の差を考える

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{1}{4}\left(a^2+2ab+b^2-4ab\right)=\frac{1}{4}(a-b)^2\geqq 0$$

等号成立は **$a=b$** のとき．

(7) $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-3x-9)>\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)$

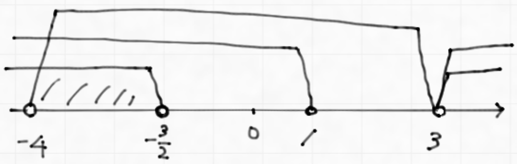
真数条件より $2x^2-3x-9>0$ …① ， $x^2-4x+3>0$ …②

底が1より小さいので　$2x^2-3x-9<x^2-4x+3$ …③

①より　$(2x+3)(x-3)>0$　$\Leftrightarrow$　$x<-\frac{3}{2}$, $x>3$

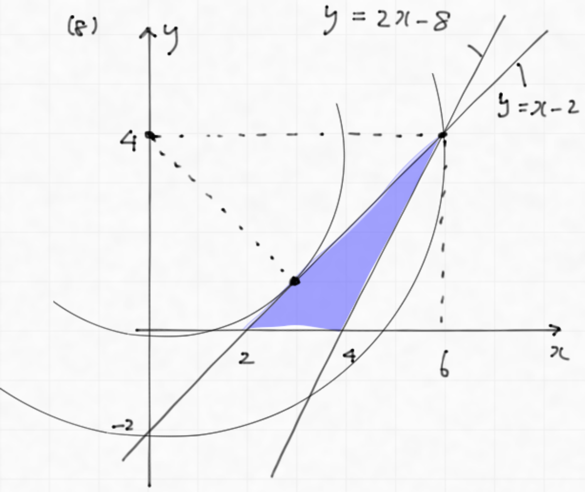
②より　$(x-1)(x-3)>0$　$\Leftrightarrow$　$x<1$, $x>3$

③より　$(x+4)(x-3)<0$　$\Leftrightarrow$　$-4<x<3$



まとめて．**$-4<x<-\frac{3}{2}$**

(8)



$x^2+(y-4)^2=r^2$ とおくと．これは

中心 $(0,4)$，半径 r の円と考えられる．

この円は不等式で表される領域（左図 青色部）と共有点を持つので，r^2 が最小となるのは左図のように $y=x-2$ と接するとき，最大となるのは $(6,4)$ を通るときとなる．

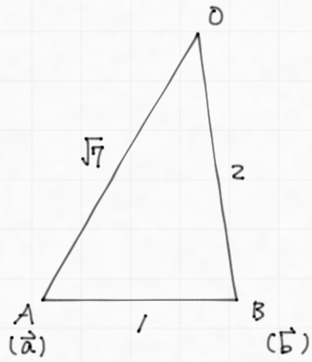
$y=x-2$ と $(0,4)$ との距離は

$$\frac{|0-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$　　よって最小値は　$(3\sqrt{2})^2=$ **18**

$(6,4)$ を通るとき

$r^2=6^2+(4-4)^2=36$　よって最大値は **36**

三重大学2021 生物資源



6 (1) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec b - \vec a|^2 = |\vec b|^2 - 2\vec a\cdot\vec b + |\vec a|^2$

$= 2^2 - 2\vec a\cdot\vec b + \sqrt{7}^2 = 1^2$

よって $\vec a\cdot\vec b = 5$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2 - (\vec a\cdot\vec b)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7\cdot 4 - 5^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $|2\vec a - 3\vec b|^2 = 4|\vec a|^2 - 12\vec a\cdot\vec b + 9|\vec b|^2 = 28 - 60 + 36 = 4$ $\quad |2\vec a - 3\vec b| = 2$

$\overrightarrow{OP}$ と $2\vec a - 3\vec b$ のなす角をθとすると

$\overrightarrow{OP}\cdot(2\vec a - 3\vec b) = -1$ より $\quad |\overrightarrow{OP}| \times 2\cos\theta = -1 \quad \therefore |\overrightarrow{OP}| = -\frac{1}{2\cos\theta}$

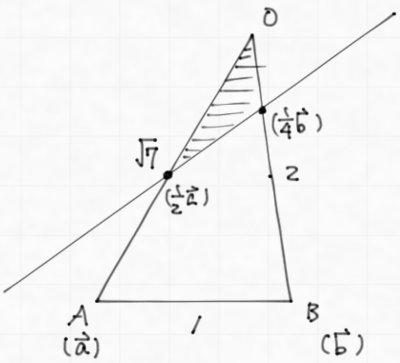
$\theta = 180^\circ$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最小で $\quad |\overrightarrow{OP}| = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

このとき $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\times\frac{2\vec a - 3\vec b}{|2\vec a - 3\vec b|} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec a + \frac{3}{4}\vec b}$

(3) $\overrightarrow{OQ}\cdot(2\vec a - 3\vec b) \geqq -\frac{1}{2}$ に $\overrightarrow{OQ} = s\vec a + t\vec b$ を代入

$(s\vec a + t\vec b)\cdot(2\vec a - 3\vec b) \geqq -\frac{1}{2} \iff 2s\cdot\sqrt{7}^2 - 3s\cdot 5 + 2t\cdot 5 - 3t\,2^2 \geqq -\frac{1}{2}$

$\iff 2s + 4t \leqq 1$



$\overrightarrow{OQ} = (2s)\frac{1}{2}\vec a + (4t)\cdot\frac{1}{4}\vec b \quad (2s) + (4t) \leqq 1$

を満たすQは、点 $\frac{1}{2}\vec a$ と $\frac{1}{4}\vec b$ を結ぶ直線の Oを含む側の領域だから

Qは 左図斜線部の領域に存在する（境界含む）

その面積は

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{16}}$

三重大学2021生物資源

8

(1) $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商が $q(x)$ 余りが $r(x)$ だから

$$f(x) = (x-\alpha)^2 q(x) + r(x) \quad \cdots ①$$

① で $x=\alpha$ とすると $f(\alpha) = 0 + r(\alpha) = r(\alpha) \quad \cdots ②$

$(x-\alpha)^2 q(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れるので、$f(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りと $r(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは等しく、また $r(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割った余りだから1次式なので、$r(x)$ を $x-\alpha$ で割ったとき、商は定数(これを c とする)、余りは $r(\alpha)$

よって $r(x) = c(x-\alpha) + r(\alpha) = f(\alpha) + c(x-\alpha) \quad (\because ②)$ 証明終

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)^2 q(x) + \cancel{f(\alpha)} + c(x-\alpha) - \cancel{f(\alpha)}}{x-\alpha}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)^{\cancel{2}} q(x) + c\cancel{(x-\alpha)}}{\cancel{x-\alpha}} = \lim_{x\to\alpha}\{(x-\alpha)q(x) + c\} = c$$ 証明終

(2) $f(\alpha) = 0$ かつ $f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = 0$ だから (1)より $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った余りを $r(x)$ とすると

$$r(x) = f(\alpha) + c(x-\alpha) = 0 + 0(x-\alpha) = 0.$$

よって $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる。

同様に $f(\beta) = 0$ かつ $f'(\beta) = \lim_{x\to\beta} \dfrac{f(x) - f(\beta)}{x-\beta} = 0$ だから、$f(x)$ は $(x-\beta)^2$ で割り切れる。

$f(x)$ は4次の整式で、$(x-\alpha)^2$ および $(x-\beta)^2$ で割り切れ、$\alpha \neq \beta$ $(\because \alpha < \beta)$ だから

$f(x)$ は $f(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と表すことができる。

(3) $y = g(x)$ と $y = mx+n$ を連立

$$x^4 - 2x^2 + 3x - 2 - mx - n = 0 \quad \cdots ①$$

① は $x=\alpha$ および $x=\beta$ を重解に持つので、

$$x^4 - 2x^2 + (3-m)x - 2 - n = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = x^4 - (2\alpha+2\beta)x^3 + (\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2 - (2\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta)x + \alpha^2\beta^2$$

上式が x の値にかかわらず成り立つので、

$$-(2\alpha+2\beta) = 0, \quad -2 = \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2, \quad 3-m = -2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta, \quad -2-n = \alpha^2\beta^2$$

$$\alpha = -1, \ \beta = 1, \ m = 3, \ n = -3$$

(4) $$\int_{-1}^{1} (x+1)^2(x-1)^2\,dx = 2\int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1\,dx = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16}{15}$$