大阪市立大2021

1 (1) $$D=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{n}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n}{3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^2}-\frac{n}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $$D=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{4}n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3) $$D=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}e^x\,dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-ne^{\frac{k}{n}}+ne^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-ne^{\frac{1}{n}}+n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k-1}{n}}\left(a_n-na_n+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-na_n+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(na_n-n^2a_n+1\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k-1}{n}}=(*)$$

ここで $\lim_{n\to\infty} n^2a_n=\frac{1}{2}$ だから $\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n}{n}=0$ となるので

$$(*)=\left(0-\frac{1}{2}+1\right)\int_0^1 e^x\,dx=\mathbf{\frac{1}{2}(e-1)}$$

(別解)

(3) $$D=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}-(e-1)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}-ne+n\right)=\lim_{n\to\infty}(1-e)\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-e)\left(\frac{1+\frac{1}{n}+a_n}{-\frac{1}{n}-a_n}+n\right)=\lim_{n\to\infty}(1-e)\left(-\frac{na_n+n+1}{na_n+1}+\frac{n^2a_n+n}{na_n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(e-1)\frac{-n^2a_n+na_n+1}{na_n+1}=(**)$$

ここで $\lim_{n\to\infty} n^2a_n=\frac{1}{2}$ だから $\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n}{n}=0$ となるので

$$(**)=(e-1)\times\frac{-\frac{1}{2}+0+1}{1}=\mathbf{\frac{e-1}{2}}$$

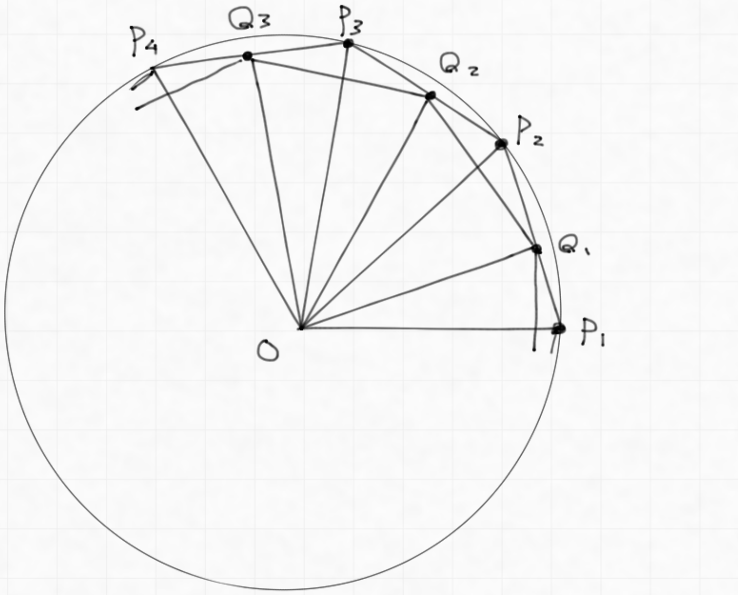
大阪市立大2021

2 (1) 単位円に内接する正n角形の頂点を

$P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする. また P_1P_2 の中点を

Q_1, P_2P_3 の中点を $Q_2, \cdots$ とする

また、内接円の中心で O とする



$\angle P_1OP_2 = \dfrac{2\pi}{n}$, $OP_1 = OP_2 = 1$

だから $\triangle P_1OP_2$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin\dfrac{2\pi}{n}$

$\triangle P_2OP_3$, $\triangle P_3OP_4$, $\cdots$ も同じ.

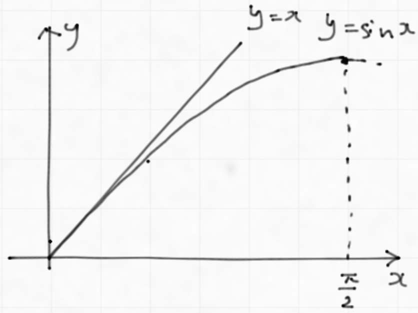
よって $A_n = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}\times n = \boldsymbol{\dfrac{n}{2}\times\sin\dfrac{2\pi}{n}}$

(2) $OQ_1 = OP_1 \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\times\dfrac{1}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{n}$

よって $\triangle Q_1OQ_2$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^2\times\sin\dfrac{2\pi}{n}$

$\triangle Q_2OQ_3$ なども同じ.

$$B_n = \boldsymbol{\frac{n}{2}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\sin\frac{2\pi}{n}}$$



(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\times\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times\pi = 1\times 1\times\pi = \boldsymbol{\pi}$

(4) $\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{\frac{n}{2}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2 = 1-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

ここで $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において. $\sin x < x$ が成り立つので $\left(\begin{array}{c}\because\ y=\sin x \text{ は } 0<x<\frac{\pi}{2} \text{ で上に凸で} \\ x=0 \text{ における接線が } y=x\end{array}\right)$

$1-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right) > 1-\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2$

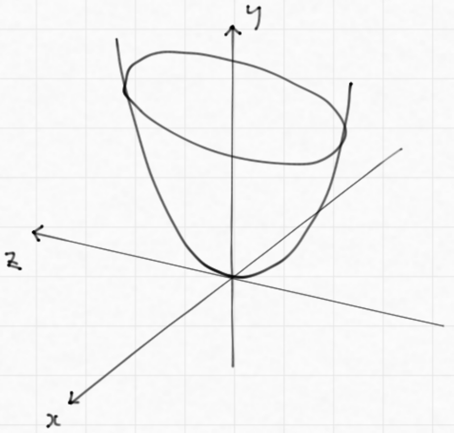
$n \geqq 32$ のとき.

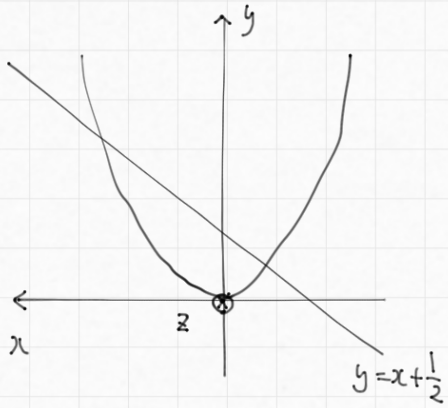
$1-\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2 \geqq 1-\left(\dfrac{\pi}{32}\right)^2 > 1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 = \dfrac{99}{100}$

以上より $n\geqq 32$ のとき $\dfrac{B_n}{A_n} > \dfrac{99}{100}$ が成立することが示された.

大阪市立大2021

3





(1) $z=t$のとき $\frac{1}{2}(x^2+t^2) \leqq y \leqq x+\frac{1}{2}$ であり、これを満たす x, y が存在すればよい。

そのための条件は $\frac{1}{2}(x^2+t^2) \leqq x+\frac{1}{2}$ を満たすxが存在することで、これを整理した

$$x^2-2x+t^2-1 \leqq 0 \quad \cdots ①$$

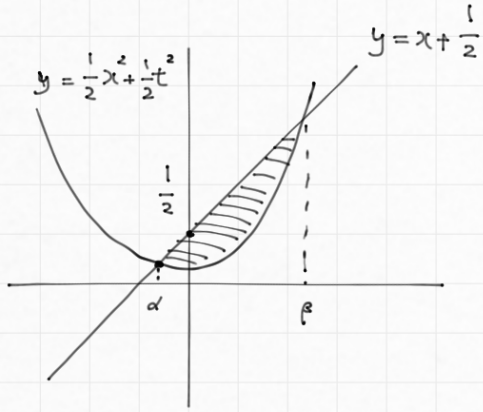
を満たすxが存在すればよい。①より

$$(x-1)^2 \leqq 2-t^2$$

これを満たすxが存在するのは $2-t^2 \geqq 0$ のときだから **$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$**

(2) $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ のとき、$\frac{1}{2}(x^2+t^2) \leqq y \leqq x+\frac{1}{2}$ を満たす

(x, y) は右グラフのようになっている



$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2$ と $y=x+\frac{1}{2}$ の交点を α, β とすると($\alpha \leqq \beta$とする)

α, βは $x^2-2x+t^2-1=0$ の解となり

$$\alpha+\beta=2, \quad \alpha\beta=t^2-1$$

よって切り口の面積$S(t)$は

$$S(t)=\frac{\frac{1}{2}}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}\left\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}(4-4t^2+4)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 体積をVとして

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$

$t=\sqrt{2}\cos\theta$ とおくと $\frac{dt}{d\theta}=-\sqrt{2}\sin\theta$,

t	$0 \to \sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$V=\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2-2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{2})\sin\theta\, d\theta=\frac{4}{3}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\, d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{4}d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\, d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\pi}$$

大阪市立大2021

4

(1) $P(n,k) = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$

(2) $\left(P(n,k)\right)^n = 1^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{3}{n}\right)^n \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n = (*)$

ここで $\frac{1}{n} = x$ と表すと

$$(*) = 1 \cdot (1-x)^{\frac{1}{x}} \cdot (1-2x)^{\frac{1}{x}} \cdot (1-3x)^{\frac{1}{x}} \cdot \cdots \cdot (1-(k-1)x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= (1-x)^{\frac{1}{x}} \left\{(1-2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2 \cdot \left\{(1-3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^3 \cdot \cdots \left\{(1-(k-1)x)^{\frac{1}{(k-1)x}}\right\}^{k-1}$$

よって

$$Q(k) = \lim_{n\to\infty} \left(P(n,k)\right)^n = \lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} \left\{(1-2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2 \cdot \left\{(1-3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^3 \cdot \cdots \left\{(1-(k-1)x)^{\frac{1}{(k-1)x}}\right\}^{k-1}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{e^3} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{e^{k-1}} = e^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$$

(3) $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\log Q(k)} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{-\frac{1}{2}k(k-1)} = \sum_{k=2}^{N} \frac{-2}{k(k-1)} = 2\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$

$$= 2\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1}\right) + 2\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + 2\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{N} - \cancel{\frac{1}{N-1}}\right)$$

$$= -2 + \frac{2}{N}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log Q(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\log Q(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \left(-2 + \frac{2}{N}\right) = -2$$