滋賀県立大・前期

1 (1) C_1とlを連立 $\frac{1}{4}x^2+ax+b=-x \iff x^2+4ax+4x+4b=0 \quad \cdots ①$

C_1とlは$x=1$で接するので①は $x=1$を重解にもつ

$$x^2+4ax+4x+4b=(x-1)^2$$

辺々比較して $\mathbf{a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{4}}$

(2) C_2とlを連立 $mx^2+nx+c=-x \iff mx^2+(n+1)x+c=0 \quad \cdots ②$

C_2とlは$x=-2$で接するので②は $x=2$を重解にもつ$(m \neq 0)$

$$mx^2+(n+1)x+c=m(x+2)^2, \quad m \neq 0$$

辺々比較して $n+1=4m, \quad c=4m$

より. $n=4m-1$, これを mn に代入.

$$mn=m(4m-1)=4m^2-m=4\left(m-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{16}$$

これが最小となるのは $m=1$のとき($\because m$は整数)で. このとき $mn=3$. $n=3$. $c=4$

$\mathbf{m=1,\ n=3,\ c=4}$

(3) $C_1: y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$

$C_2: y=x^2+3x+4$

連立すると $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=x^2+3x+4$

$x^2+6x+5=0$

$x=-1, -5$

$$S=\left|\int_{-5}^{-1} \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}-(x^2+3x+4)\,dx\right|$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{6}(-1+5)^3=\frac{4^3}{8}=\mathbf{8}$$

滋賀県立大・前期

2

(1) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = s^2$ に $\alpha^2+\beta^2=1$ を代入 $\alpha\beta = \dfrac{s^2-1}{2}$

(2) 解と係数の関係

$$x^2 - sx + \frac{s^2-1}{2} = 0$$

(3) (2)の2次方程式の2解がα, βだから、これが虚数解を持てば良い。

判別式をDとして

$$D = s^2 - 4\cdot\frac{s^2-1}{2} < 0 \iff s > \sqrt{2},\ s < -\sqrt{2}$$

(4) (i)

$$\begin{array}{r|llll}
 & x & -s & & \\
\hline
x^2 - sx + \frac{s^2-1}{2} & x^3 & -2sx^2 & tx & \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s \\
 & x^3 & -sx^2 & \frac{s^2-1}{2}x & \\
\hline
 & & -sx^2 & (t-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2})x & \frac{1}{2}s^2+\frac{1}{8}s \\
 & & -sx^2 & +s^2x & -\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s \\
\hline
 & & & (t-\frac{3}{2}s^2+\frac{1}{2})x & \frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s^2-\frac{3}{8}s
\end{array}$$

$$Q(x) = x - s \qquad R(x) = \left(t - \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{8}s$$

(ii) $F(x)=0$ が $(x-\alpha)(x-\beta)$を因数にもつことになるので (i)の$R(x)=0$となる

よって $t - \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2} = 0$ かつ $\frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{8}s = 0$

後者から $s = 0,\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$

このうち(3)を満たすのは $s = -\frac{3}{2}$

$s = -\frac{3}{2}$のとき $t = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{23}{8}$

$$s = -\frac{3}{2},\ t = \frac{23}{8}$$

(2)の方程式は $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8} = 0$ となる。これを解くと

$$x = \frac{-3 \pm i}{4}$$

もう1つの解は $Q(x) = x + \frac{3}{2}$ だから $x = -\frac{3}{2}$

以上より $x = \dfrac{-3+i}{4},\ \dfrac{-3-i}{4},\ -\dfrac{3}{2}$

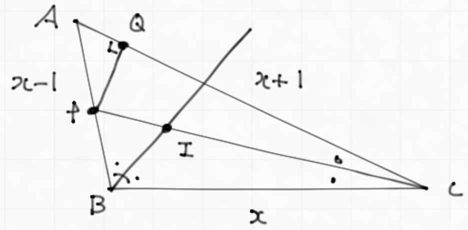
滋賀県立大・前期

3 (1) $x-1 < x < x+1$ だから、三角形の成立条件より、

$x-1 > (x+1) - x$ かつ $x+1 < x + (x-1)$ 　整理して $x > 2$

(2) $\cos\angle BAC = \dfrac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2BA\cdot BC} = \dfrac{(x-1)^2 + (x+1)^2 - x^2}{2(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x^2+2}{2(x^2-1)}$



(3) (i) $AP = AB \times \dfrac{AC}{AC+BC} = (x-1)\dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$

$AQ = AP \times \cos\angle BAC = \dfrac{x^2+2}{2(2x+1)}$

(ii) $\dfrac{CQ}{AQ} = \dfrac{x+1 - \dfrac{x^2+2}{2(2x+1)}}{\dfrac{x^2+2}{2(2x+1)}} = \dfrac{4x^2+4x+2x+\cancel{2}-x^2-\cancel{2}}{x^2+2} = \dfrac{3x(x+2)}{x^2+2} = f(x)$ とおく

$f(x) = 3 + \dfrac{6x-6}{x^2+2}$

$f'(x) = \dfrac{6(x^2+2) - 6(x-1)\times 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-6(x^2-2x-2)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = 0$ を解くと $x = 1 \pm \sqrt{3}$

このうち $x > 2$ を満たすのは $x = 1+\sqrt{3}$

$f(x)$ の増減は右のようになる

x	2	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
f'	/	+	0	−
$f(x)$	/	↗		↘

$f(1+\sqrt{3}) = \dfrac{18+12\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \dfrac{9+6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{9+9\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3(1+\sqrt{3})}{2}$

滋賀県立大・前期

4

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ とおく

真数条件より $x > 0$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{1}{3}} - \log x \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3-\log x}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$h'(x) = 0$ となるのは $x = e^3$ のとき.

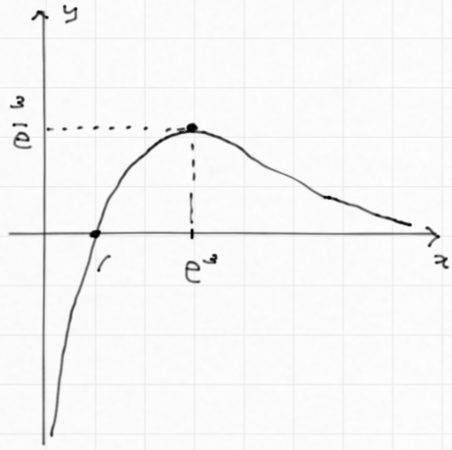
$x < e^3$ のとき $h'(x) > 0$, $x > e^3$ のとき $h'(x) < 0$

増減は右のようになっている

x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		↗		↘

$h(e^3) = \dfrac{3}{e}$ だから $x = e^3$ のとき 極大値 $\dfrac{3}{e}$ をとる

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ だから $y = h(x)$ のグラフは右のようになる



$y = h(x)$ と $y = a$ の 2つのグラフの交点の数と

$h(x) = a$ の実数解の個数が一致するので

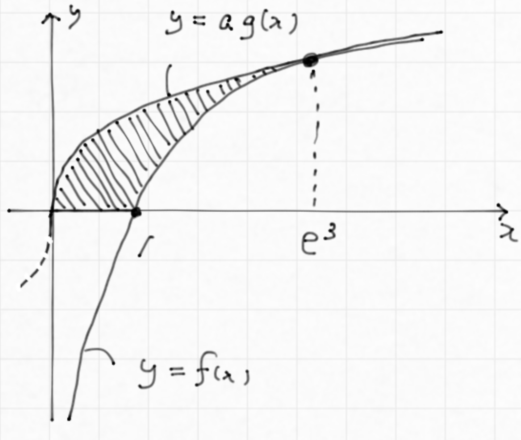
$$\begin{cases} a > \dfrac{3}{e} \text{ のとき.} & \textbf{解なし.} \\ a = \dfrac{3}{e} \text{ または } a \leqq 0 \text{ のとき} & \mathbf{1つ} \\ 0 < a < \dfrac{3}{e} \text{ のとき} & \mathbf{2つ} \end{cases}$$

(3) $f(x) = ag(x)$ の解は2の方程式の解と等しい

$a > 0$ で解が1つなのは $a = \dfrac{3}{e}$ のとき.

このとき. $y = f(x)$, $y = ag(x)$ のグラフは

右のようになっており. もとめる面積は



$$S = \int_0^{e^3} \frac{3}{e} x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_1^{e^3} \log x\,dx$$

$$= \left[\frac{9}{4e} x^{\frac{4}{3}}\right]_0^{e^3} - \left[x\log x - x\right]_1^{e^3}$$

$$= \frac{9}{4}e^3 - 0 - e^3 \times 3 + e^3 + (0-1) = \mathbf{\frac{1}{4}e^3 - 1}$$