神戸大学2022

1 (1) $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ (以下式①と呼ぶ)が全ての自然数で成り立つことを数学的帰納法によって示す

(i) $n=1$のとき. $\dfrac{2}{\sqrt{a_1}}=\dfrac{2}{1}=2$ だから. 式①は$n=1$で成り立っている.

(ii) $n=k$, 式①が成り立っていると仮定する.

$a_{k+2}=\sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$ に $a_{k+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_k}}$ より $\sqrt{a_k}=\dfrac{2}{a_{k+1}}$ を代入すると

$$a_{k+2}=\sqrt{a_{k+1}}\times\frac{2}{a_{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{a_{k+1}}}$$

$n=k+1$のときも式①は成り立っている.

(i)(ii)より、数学的帰納法により式①は全ての自然数nについて成り立っている.

(2) 式①の自然対数をとる

$$\log a_{n+1}=\log 2-\frac{1}{2}\log a_n$$

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\log 2$$

$$b_{n+1}-\frac{2}{3}\log 2=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{2}{3}\log 2\right)$$

これは数列$\{b_n-\frac{2}{3}\log 2\}$が公比$-\frac{1}{2}$の等比数列であることを示している.

初項 $b_1-\frac{2}{3}\log 2=\log 1-\frac{2}{3}\log 2=-\frac{2}{3}\log 2$ だから. 一般項 $b_n-\frac{2}{3}\log 2$は

$$b_n-\frac{2}{3}\log 2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\log 2\right).$$

$$b_n=\left\{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{2}{3}\right\}\log 2$$

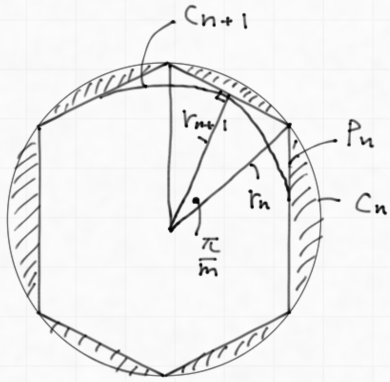
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}\log 2=\log 2^{\frac{2}{3}}$ だから.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{b_n}=e^{\log 2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$$

2

(1) 右図より $r_n \cos\frac{\theta}{2} = r_{n+1}$

$$r_n = r_1\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} = \cos^{n-1}\frac{\theta}{2}$$



正m角形は頂角 $\frac{2\pi}{m}$ の二等辺三角形 m個からなる.

その面積を t_n として

$$t_n = \frac{1}{2}\cdot r_n^2 \cdot \sin\theta \times m$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}\cdot \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} \times m$$

$$= \frac{2\pi}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos^{2n-1}\frac{\theta}{2}$$

$$S_n = \pi r_n^2 - t_n = \pi\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos^{2n-1}\frac{\theta}{2}$$

$$= \pi\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(2) $\{S_n\}$ は初項 $S_1 = \pi\left(1-\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$, 公比 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ の等比数列. だから

$$f(m) = \frac{\pi\left(1-\frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\pi\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(3) $$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{4\pi\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)}{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}} = \frac{4\pi\cdot\frac{1}{6}}{1} = \frac{2}{3}\pi$$

3

(1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 2ax = \dfrac{2x(1-a-ax^2)}{1+x^2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

$f'(x)=0$ となるのは $x=0$, $x=\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$

$f(x)$ の増減は右のようになる

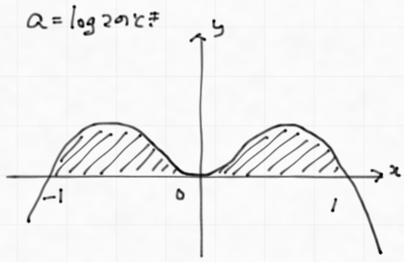
$f(-x)=f(x)$ だから $f(x)$ は偶関数.

$f\left(-\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right) = \log\left(1+\dfrac{1-a}{a}\right) - a\dfrac{1-a}{a} = -\log a - 1 + a$

$f(0) = \log 1 - 0 = 0$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ のとき 極大値 $\mathbf{-\log a - 1 + a}$, $x=0$ のとき 極小値 $\mathbf{0}$

$a=\log 2$ のとき



(2) $f(1) = \log 2 - a = 0 \quad \therefore\ a = \log 2$

このとき $f(x) = \log(1+x^2) - \log 2 \cdot x^2$ で $f(x)=0$ となるのは

$\log(1+x^2) = \log 2^{x^2}$

$1+x^2 = 2^{x^2}$

$x = \pm 1, 0$

もとめる面積を S とすると

$S = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 \log(1+x^2) - (\log 2)x^2\,dx$

$= 2\left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 x\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx - 2\log 2\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= 2\log 2 - \dfrac{2}{3}\log 2 + 4\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2} - 1\ dx \quad \cdots ①$

$\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$ について $x=\tan\theta$ とおくと. $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\times\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \dfrac{\pi}{4}$

よって ① $= \mathbf{\dfrac{4}{3}\log 2 + \pi - 4}$

4

(1) 2式を連立 $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}(\sqrt{a}x+\sqrt{a})=1 \Leftrightarrow (a-1)x^2+2ax+a+4=0$ …①

①が異なる2解を持てばよい。

そのための条件は $a-1\neq 0$ かつ ①の判別式 D が $D>0$ を満たすことである。

$$D/4 = a^2-(a-1)(a+4) = -3a+4>0 \qquad a<\frac{4}{3}$$

a は正の実数で、かつ $a\neq 1$ だから $\quad \mathbf{0<a<1,\ 1<a<\frac{4}{3}}$

(2) 交点の x 座標を p, q とすると、p, q は①の2解だから、解と係数の関係より

$$p+q=-\frac{2a}{a-1}, \quad pq=\frac{a+4}{a-1}$$

$$s=\frac{p+q}{2}=\frac{a}{1-a} \qquad t=\sqrt{a}s+\sqrt{a}=\frac{a\sqrt{a}}{1-a}+\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}}{1-a}$$

$$\therefore\ \mathbf{(s, t)=\left(\frac{a}{1-a}, \frac{\sqrt{a}}{1-a}\right)}$$

(3) $s=\frac{a}{1-a}$ より $(1-a)s=a \Leftrightarrow (1+s)a=s$

$s=-1$ のとき、上式は成立しないので $s\neq -1$ だから $a=\frac{s}{1+s}$

これを (1) の結果に代入

$$0<\frac{s}{1+s}<1 \ \dots② \qquad 1<\frac{s}{1+s}<\frac{4}{3} \ \dots③$$

②より $0<(1+s)s<(1+s)^2$,

$s(1+s)>0 \Leftrightarrow s<-1,\ s>0$

$(1+s)s<(1+s)^2 \Leftrightarrow s>-1$ $\qquad$ より $\quad s>0$

③より $(1+s)^2<s(1+s)<\frac{4}{3}(1+s)^2$

$s<-1$, $\quad s<-4,\ s>-1$ $\quad$ より $s<-4$ $\qquad$ よって $\mathbf{s<-4,\ s>0}$

(4) $t=\frac{\sqrt{a}}{1-a}=\frac{\sqrt{\frac{s}{1+s}}}{1-\frac{s}{1+s}}=\mathbf{\sqrt{s(1+s)}}$

5

(1) $a^x = b^y = (ab)^z$ の自然対数をとる

$$x\log a = y\log b = z\log ab = k \text{ とおく.}$$

$x = \dfrac{k}{\log a}$, $y = \dfrac{k}{\log b}$, $z = \dfrac{k}{\log ab}$

左辺 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{\log a}{k} + \dfrac{\log b}{k} = \dfrac{\log ab}{k} = \dfrac{1}{z}$ = 右辺. よって条件の下で $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ が成り立つ.

(2) 分母をはらって

$$np + mp = mn$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-p)(n-p) = p^2$$

pは素数m.nは $m>n$ を満たす自然数なので $m-p > n-p \geqq 1-p$

よって $(m-p,\ n-p) = (p^2, 1)$

$$\therefore\ \boldsymbol{m = p^2+p,\ n = p+1}$$

(3) (1)より, $a^m = b^n = (ab)^p$ が成り立つとき $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ が成り立ち.

このとき (2) より $m = p^2+p$, $n = p+1$

これを条件に代入

$$a^{p^2+p} = b^{p+1} = (ab)^p$$

対数をとって

$$(p^2+p)\log a = (p+1)\log b = p(\log a + \log b)$$

左等式より

$\log b = p\log a$ より $b = a^p$

これは右等式を満たしている $\therefore\ \boldsymbol{b = a^p}$