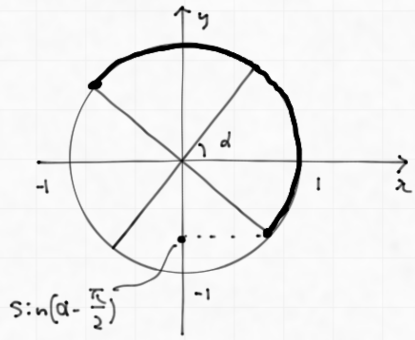
久留米大学2022

1　だ円の媒介変数表示を利用．Pは $(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$　$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくことができる．

(1)　$x+y = 2\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$　（ただし α は $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$ を満たす実数）

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より　$-\frac{\pi}{2}+\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \frac{\pi}{2}+\alpha$



このとき $\sin(\theta+\alpha)$ は 左図より．

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$$

$$-\cos\alpha \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$$

$$-\sqrt{3} \leqq \sqrt{7}\sin(\theta+\alpha) \leqq \sqrt{7}$$

よって $x+y$ の最大値は $\sqrt{7}$　最小値は $-\sqrt{3}$

(2)　$x^2+y = 4\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) + \sqrt{3}\sin\theta = -4\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \frac{67}{16}$

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから．$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{8}$ のとき 最大 $\frac{67}{16}$

$\sin\theta = -1$ のとき 最小 $-\sqrt{3}$

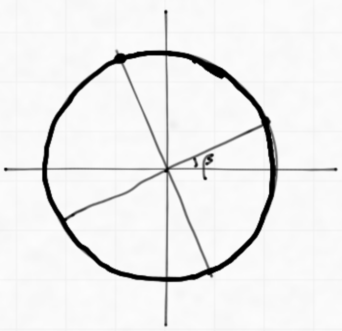
(3)　$x^2+xy+y^2 = 4\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta$

$$= 2(1+\cos 2\theta) + \sqrt{3}\sin 2\theta + \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2\theta+\beta) + \frac{7}{2}$$

ただし β は $\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$．$\left(\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{13}}\right.$ を満たす実数）



左図より　$2\theta+\beta = \frac{\pi}{2}$ のとき．$\sin(2\theta+\beta)$ は最大値1をとる．

よってもとめる最大値は $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

2

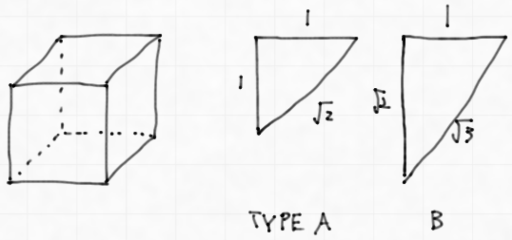
(1) (i) 3枚とも同じカード　8通り

(ii) 2枚が同じカード　$8 \times 7 = 56$通り

(iii) 3枚とも違うカード　${}_8C_3 = 56$通り　　$8+56+56 = $ **120通り**

(2) ${}_8C_3 = $ **56** 個

(3)



左の2つの形状のものが直角三角形

TYPE A は各面に4つずつ　$6 \times 4 = 24$個

TYPE B は各辺に2つずつ　$12 \times 2 = 24$個

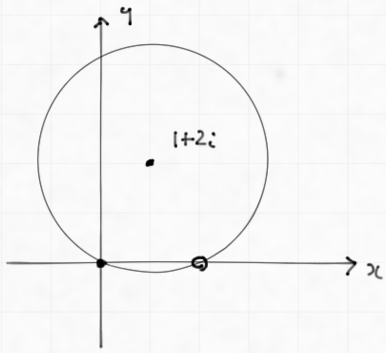
合計 **48** 個

(他は正三角形が8個)

3

(1) $z \neq 2$.

wは実数なので　$$\frac{(1-2i)z}{(z-2)i} = \overline{\left(\frac{(1-2i)z}{(z-2)i}\right)}$$



$$(1-2i)z(\bar{z}-2)(-i) = (1+2i)\bar{z}(z-2)i$$

$$(-i-2)(z\bar{z}-2z) = (i-2)(z\bar{z}-2\bar{z})$$

$$\cancel{2}i\, z\bar{z} - \cancel{2}(i-2)\bar{z} - \cancel{2}(i+2)z = 0$$

$$z\bar{z} - (1+2i)\bar{z} - (1-2i)z = 0$$

$$(z-1-2i)(\bar{z}-1+2i) = (-1+2i)(-1-2i)$$

$$|z-1-2i|^2 = 5$$

$\therefore\ |z-(1+2i)| = \sqrt{5}$　　点 **$1+2i$** を除く、半径 **$\sqrt{5}$** の円

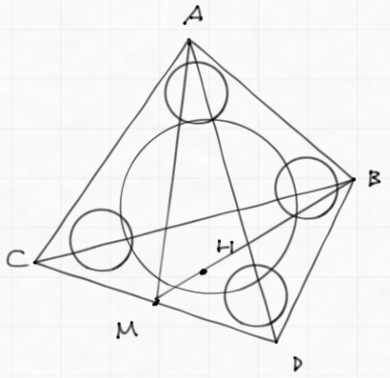
(2) 右上図より A は原点 0　　AとBとの距離は $|5-5i| = $ **$5\sqrt{2}$**

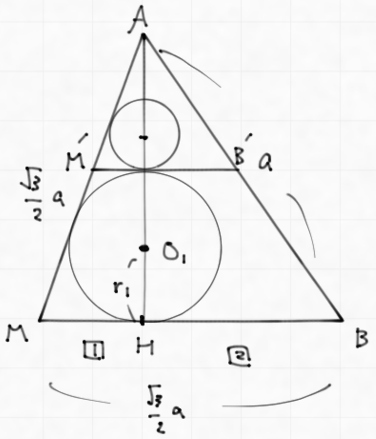
(3) zがC上を動くとき、$|z-(a+6i)|$が最小となるのは、$a+6i$と中心$1+2i$を結ぶ線分とCが交わるときである。

$|a+6i-(1+2i)| = |a-1+4i|$　だから　$a=1$のとき、中心との距離は最小

このとき zと$a+6i$との距離は　$|4i| - \sqrt{5} = $ **$4-\sqrt{5}$**

4





$$AH=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$AO_1:O_1M=3:1$ だから

$$r_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

$\triangle AMB \backsim \triangle AM'B'$ で $AM:AM'=2:1$

$$r_n=r_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$r_6=\frac{\sqrt{6}}{384}a$$

(2) C_1は1つ　C_2は4つ　C_3は4こ　…

$n\geqq 2$のとき、C_nは4コずつあり、その体積は　$\frac{4}{3}\pi r^n=\frac{4}{3}\pi r_1^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-3}$

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{4\times\frac{4}{3}\pi r_1^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-3}\right\}=\frac{4}{3}\pi r_1^3+4\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3\left(1+4\times\frac{1}{7}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{6}\sqrt{6}}{\cancel{12^3}}\pi\times\frac{11}{7}a^3=\frac{11\sqrt{6}}{1512}\pi a^3$$

5

(1) $72 = 2^3 \times 3^2$ だから 72の約数は $2^a \times 3^b$ の形となる（aは0.1.2.3．bは0.1.2のいずれか）

したがって 72の約数は $4 \times 3 = 12$ コ存在する　$《72》= 12$

$48 = 2^4 \times 3^1$ だから　$《48》= 5 \times 2 = 10$

$\therefore$ $《72》-《48》= \mathbf{2}$

(2) 1とnはnの約数だから $《n》= 2$ となるのはnが素数のとき．

3桁の素数で最小のものは **101** だから

$\cancel{999}$. $\cancel{998}$. 997　　$\sqrt{997} = 31. \cdots$

$997 \div 7 = 142 \cdots 3$

$997 \div 13 = 76 \cdots 9$

$997 \div 17 = 58 \cdots 11$

$997 \div 19 = 52 \cdots 9$

$997 \div 23 = 43 \cdots 8$

$997 \div 29 = 34 \cdots 11$

最大のものは

997

(3) nの約数をaとしたとき　$n = ab$ を満たすbが存在する．

$a \neq b$ のとき．aおよびbは．いずれもnの約数だから約数は対の状態で存在する

したがって《n》が奇数となるのは $a = b$ となるものが含まれている．すなわち．

nが平方数であるものに限られる

2桁の平方数は　$4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$ の 6つ．

よって 条件を満たす 2桁の自然数は　**6** 個

(4) $《81》= 5$　$(\because 81 = 3^4)$

$2《n》^2 - 9《n》- 35 = 0$

$(2《n》+ 5)(《n》- 7) = 0$

$《n》= 7$　（$\because$《n》は正の整数）

$《n》= 7$ となるnは平方数に限られ．　$n = a^6$ の形のみ．

$2^6 = 64$．$3^6 = 729$．$4^6 = 64 \times 64 = 4096$　　$\therefore$ $n = \mathbf{729}$

6

(1) $I_{m,0} = \int_1^e x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_1^e = \frac{e^{m+1} - 1}{m+1}$

(2) $I_{m+1,n+1} = \int_1^e x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx$

$= \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{m+2}}{m+2} \times (n+1)(\log x)^n \frac{1}{x} dx$

$= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} \int_1^e x^{m+1} (\log x)^n dx$

$= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} I_{m+1,n}$

(3) $I_{3,3} = \frac{e^4}{4} - \frac{3}{4} I_{3,2}$

$I_{3,2} = \frac{e^4}{4} - \frac{2}{4} I_{3,1}$

$I_{3,1} = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} I_{3,0} = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{e^4 - 1}{4} = \frac{3}{16} e^4 + \frac{1}{16}$

$I_{3,2} = \frac{e^4}{4} - \frac{3}{32} e^4 - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} e^4 - \frac{1}{32}$

$I_{3,3} = \frac{e^4}{4} - \frac{15}{128} e^4 + \frac{3}{128} = \frac{17}{128} e^4 + \frac{3}{128} = \frac{17 e^4 + 3}{128}$