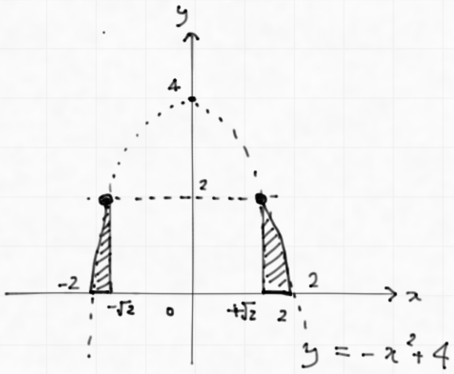
島根大学2022

1 (1) $|x| \geqq \sqrt{2}$ かつ $y \geqq 0$ のとき

$$x^2 - 2 + y \leqq 2$$

$$\Leftrightarrow y \leqq -x^2 + 4$$

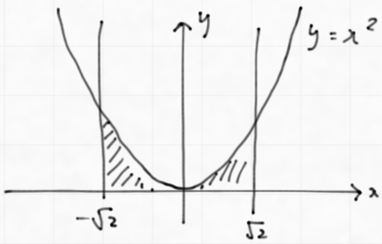
上の条件を満たす範囲は右図斜線部(境界含む.



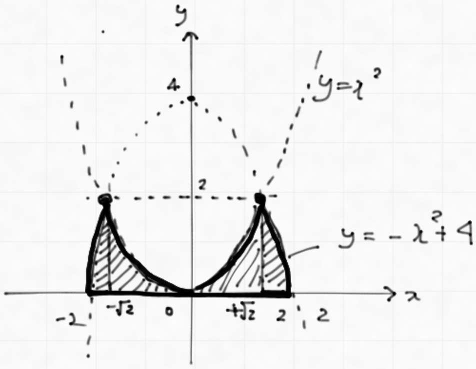
(2) $y \geqq 0$, $|x| < \sqrt{2}$ のとき

$$-(x^2-2) + y \leqq 2$$

$$y \leqq x^2$$



左下グラフと(1)の結果をまとめて



(3) $y < 0$, $x^2 \geqq \sqrt{2}$ のとき

$$x^2 - 2 - y \leqq 2$$

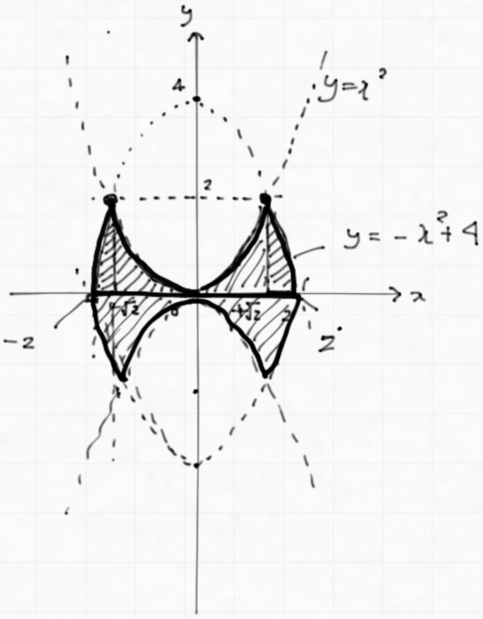
$$y \geqq x^2 - 4$$

$y < 0$, $x^2 < \sqrt{2}$ のとき

$$-(x^2-2) - y \leqq 2$$

$$y \geqq -x^2$$

以上と(2)を併せて.



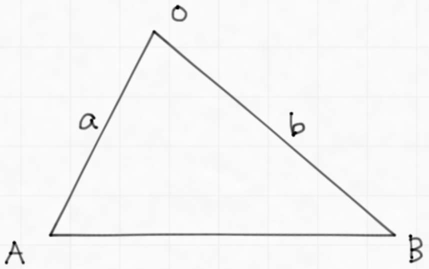
Dの面積をSとして

$\times 2$

$$S = \left\{ \frac{1}{6}(2+2)^3 - \frac{1}{6}(\sqrt{2}+\sqrt{2})^3 \times 2 \right\} \times 2$$

$$= \left(\frac{32}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} \right) \times 2 = \mathbf{\frac{32}{3}(2-\sqrt{2})}$$

2



(1) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

(2) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$= |\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= a^2+b^2-2c$

$|\overrightarrow{AB}|^2>0$ だから　$a^2+b^2-2c>0$

(3) $|\overrightarrow{OP}|^2 = (1-s)^2a^2+s^2b^2+2s(1-s)c$

$= (a^2+b^2-2c)s^2+2(c-a^2)s+a^2$

$= (a^2+b^2-2c)\left(s+\dfrac{c-a^2}{a^2+b^2-2c}\right)^2-\dfrac{(c-a^2)^2}{a^2+b^2-2c}+a^2$

ここで $a^2+b^2-2c>0$ だから上の式はSについて下に凸な2次関数であり　$0<a^2+b^2-2c \leqq a^2+a^2-2c = 2(a^2-c)$ が成り立つので $\dfrac{a^2-c}{a^2+b^2-2c}>0$. すなわち上の式は

$$s=\frac{a^2-c}{a^2+b^2-2c}$$ のとき最小となる.

またこのとき. $|\overrightarrow{OP}|$ は.

$|\overrightarrow{OP}|^2 = \dfrac{-(c-a^2)^2}{a^2+b^2-2c}+a^2 = \dfrac{-c^2+\cancel{2ca^2}-\cancel{a^4}+\cancel{a^4}+a^2b^2-\cancel{2ca^2}}{a^2+b^2-2c}$

$= \dfrac{a^2b^2-c^2}{a^2+b^2-2c}$

∴ $|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{a^2b^2-c^2}{a^2+b^2-2c}}$

3

(1) $-x = t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2px+1}+x+q\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-2pt+1}-t+q\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-2pt+1-(t-q)^2}{\sqrt{t^2-2pt+1}+t-q}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2p+\frac{1}{t}+2q-\frac{q^2}{t}}{\sqrt{1-\frac{2p}{t}+\frac{1}{t^2}}+1-\frac{q}{t}}=\frac{2(q-p)}{1+1}=q-p=r \quad \cdots ①$$

p. q の目とq−p を表にまとめると

p \ q	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	−1	0	1	2	3	4
3	−2	−1	0	1	2	3
4	−3	−2	−1	0	1	2
5	−4	−3	−2	−1	0	1
6	−5	−4	−3	−2	−1	0

左表の赤丸のついているところだとrが①を満たす値となりうる。

よって、もとめる確率は

$$\frac{15}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$$

(2) $$\int_0^r px^2-4x+q\,dx=\left[\frac{1}{3}px^3-2x^2+qx\right]_0^r=\frac{1}{3}pr^3-2r^2+qr=\frac{1}{3}r(pr^2-6r+3q)$$

$r\geq 1>0$ だから 上式が負の値をとるのは $pr^2-6r+3q<0$ のとき

$r=1$ のとき　$p+3q<6$　$(p.q)=(1,1),(2,1)$

$r=2$ のとき　$4p+3q<12$　$(p.q)=(1,1),(1,2),(2,1)$

$r=3$ のとき　$9p+3q<18 \Leftrightarrow 3p+q<6$　$(p.q)=(1,1),(1,2)$

$r=4$ のとき　$16p+3q<24$　$(p.q)=(1,1),(1,2)$

$r=5$ のとき　$25p+3q<30$　$(p.q)=(1,1)$

$r=6$ のとき　$36p+3q<36$　存在しない

以上より 条件を満たす目の出方は 10通りで　$\frac{10}{6^3}=\frac{5}{108}$

4

(1) 右辺−左辺 $= \frac{1}{a^2} - 1 - 2\left(\frac{1}{a}-1\right) = \left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}-1\right) - 2\left(\frac{1}{a}-1\right)$

$= \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}+1-2\right) = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 > 0$ （∵ 等号は $a=1$ だが、a は $0<a<1$）

(2) $f(x) = ax - \log(1+x)$

$f'(x) = a - \frac{1}{1+x}$

$x > 2\left(\frac{1}{a}-1\right)$ より $1+x > \frac{2}{a} - 1 = \frac{2-a}{a}$ よって $\frac{1}{1+x} < \frac{a}{2-a}$

$a - \frac{1}{1+x} > a - \frac{a}{2-a} = \frac{a-a^2}{2-a} = \frac{a(1-a)}{2-a} > 0$

よって $f'(x)$ は $2\left(\frac{1}{a}-1\right) < x$ の範囲で常に正であり、$f(x)$ は単調に増加する

次に $f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)$ と $f\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$ の正負を考える.

(i) $f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right) = a \times 2\left(\frac{1}{a}-1\right) - \log\left(1+2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)$

$= 2-2a-\log\left(\frac{2}{a}-1\right) = 2-2a-\log(2-a)-\log a$

$= g(a)$ とおく

$g'(a) = -2 + \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a} = \frac{2(-a^2+2a+1)}{a(a-2)} = \frac{2\{-(a-1)^2+2\}}{a(a-2)}$

ここで $0<a<1$ だから、上式は正の値をとり、$g'(a)$ は $0<a<1$ で常に正

したがって $g(a)$ は単調に増加し、$g(a) < g(1) = 2-2-\log 1-\log 1 = 0$ より $g(a)<0$ と分かる

(ii) $f\left(\frac{1}{a^2}-1\right) = a\left(\frac{1}{a^2}-1\right) - \log\left(\frac{1}{a^2}-1+1\right) = \frac{1}{a} - a + 2\log a = h(a)$ とおく.

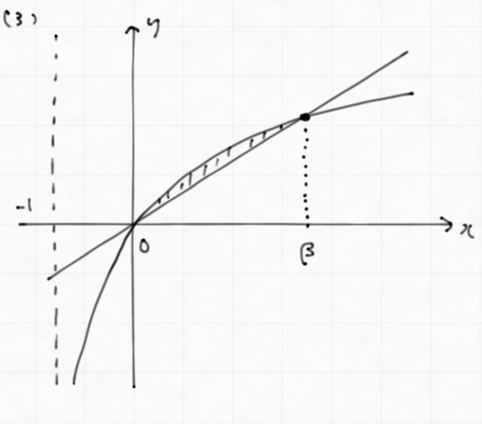
$h'(a) = -\frac{1}{a^2} - 1 - \frac{2}{a} = \frac{-(a+1)^2}{a^2} < 0$

$h'(a)$ は常に負の値をとるので $h(a)$ は単調に減少し、$h(a) > h(1) = 1-1+2\log 1 = 0$

より $h(a)>0$ と分かる.

(i)(ii) および、$f(x)$ が単調に減少することから、$f(x)$ は $2\left(\frac{1}{a}-1\right) < x < \frac{1}{a^2}-1$ の範囲で x 軸と交わり、これを β とすると、$f(x)=0$ が、$2\left(\frac{1}{a}-1\right) < x < \frac{1}{a^2}-1$ の範囲でただ1つの解 β を持つといえる.

(3)



β は $f(x)=0$ の解だから、$f(\beta) = a\beta - \log(1+\beta) = 0$ …①

$$S = \int_0^\beta \log(1+x) - ax \, dx$$

$$= \left[(1+x)\log(1+x) - x - \frac{1}{2}ax^2\right]_0^\beta$$

$$= (1+\beta)\log(1+\beta) - \beta - \frac{1}{2}a\beta^2$$

$$= (a-1)\beta + \frac{1}{2}a\beta^2$$ （∵①）