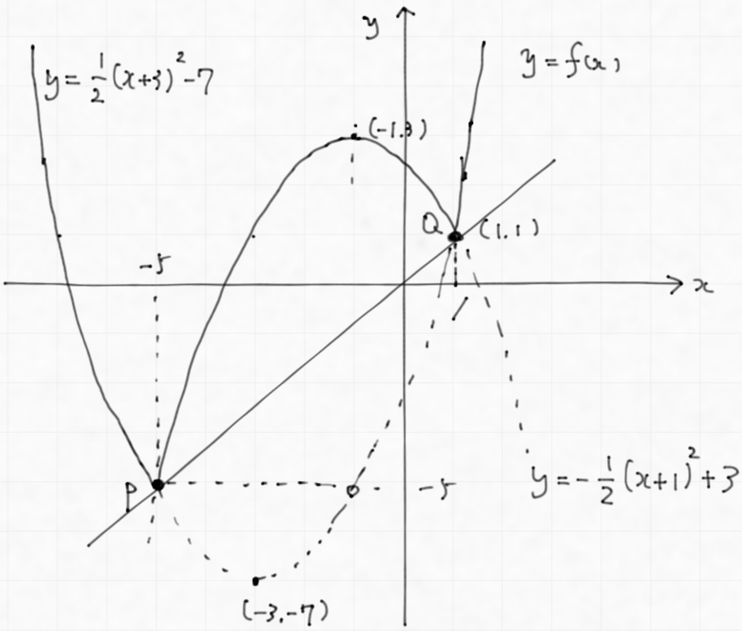
香川大学 2021

1 (1) $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)\geqq 0$ となるのは $x\leqq -5,\ x\geqq 1$

このとき. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x+3)^2-7 \quad (x\leqq -5,\ x\geqq 1)$

$x^2+4x-5<0$ となるのは $-5<x<1$

このとき $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3 \quad (-5<x<1)$



以上より $y=f(x)$ のグラフは右のようになる.

(2) $f(x)=-k$. $y=f(x)$ と $y=-k$ のグラフの交点の数を考える

$-k>3$	のとき	2コ
$-k=3$	〃	3コ
$1<-k<3$	〃	4コ
$-k=1$	〃	3コ
$-5<-k<1$	〃	2コ
$-k=-5$	〃	1コ
$-k<-5$	〃	0コ

よって

$$\begin{cases} -3<k<-1 \text{ のとき 実数解は 4個} \\ k=-3,-1 \quad 〃 \quad 〃 \quad 3\text{個} \\ k<-3,\ -1<k<5 \text{ のとき 実数解は 2個} \\ k=5 \text{ のとき} \quad 〃 \quad 1\text{個} \\ k>5 \quad 〃 \quad 〃 \quad 0\text{個} \end{cases}$$

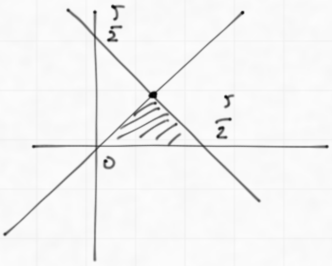
(3) P. Q は上図より. $P(-5,-5)$ $Q(1,1)$

したがって l の式は $y=\frac{1+5}{1+5}(x-1)+1$ $\qquad y=x$

$x\leqq -5,\ x\geqq 1$ のとき. $\left(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}\right)'=x+3=-1$ となるのは $x=-4$ (範囲外)

$-5<x<1$ のとき $\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}\right)'=-x-1=-1$ 〃 $x=0$

$x=0$ における接線は $f(0)=\frac{5}{2}$ だから $y=-x+\frac{5}{2}$

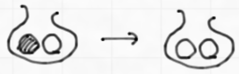
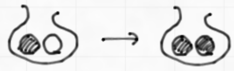


$y=x$ と $y=-x+\frac{5}{2}$ の交点は $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$

したがって もとめる面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{25}{16}$

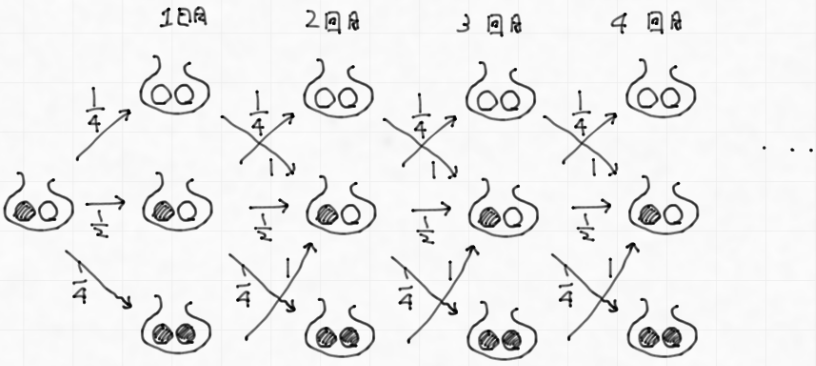
香川大学2021

2　Aの袋の状態を  で表す.

　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　　　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$　　 からは必ず  となる

よって状態の変化は下のようになる



左図より

$a_1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$a_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 1 = \mathbf{\frac{3}{4}}$

$a_3 = a_2\times\frac{1}{2}+(1-a_2)\times 1 = \mathbf{\frac{5}{8}}$

(2)　$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1\times b_n$　　$\therefore\ \mathbf{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n}$

(3)　$a_n + b_n = 1$ より $b_n = 1 - a_n$ を (2) に代入

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 - a_n = 1 - \frac{1}{2}a_n$

$a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$ と変形できる

このとき $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{2}{3}\left(=-\frac{1}{6}\right)$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから, その一般項は,

$a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\mathbf{a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

香川大学2021

3 球の式は $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Rはxy平面上にあるので $R(X,Y,0)$ とおける.

Qが PとRを $t:1-t$ と内分するものと考えると.

$$\vec{OQ} = t\vec{OR}+(1-t)\vec{OP} = t\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tX\\tY+1-t\\2-2t\end{pmatrix}$$

これが球上にあるので.

$$t^2X^2+(tY-t+1)^2+(1-2t)^2=1$$

$$t^2X^2+t^2Y^2+t^2+1-2t^2Y+2tY-2t+\cancel{1}-4t+4t^2=\cancel{1}$$

$$t^2(X^2+Y^2-2Y+5)+t(2Y-6)+1=0 \cdots ①$$

①は t についての2次方程式で. この2次方程式が実数解を持つための条件を満たす(X,Y)を考えたとき. (X,Y)はRの動く範囲に含まれる.

判別式をDとして

$$D/4=(Y-3)^2-(X^2+Y^2-2Y+5)\times 1$$

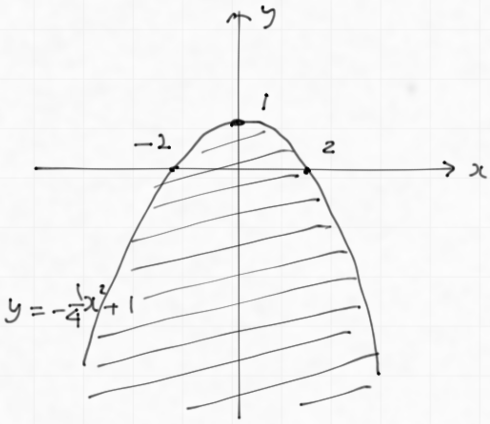
$$=\cancel{Y^2}-6Y+9-X^2-\cancel{Y^2}+2Y-5$$

$$=-4Y-X^2+4\geqq 0$$

整理して. $Y\leqq -\frac{1}{4}X^2+1$

よってRの通過する領域は $y\leqq -\frac{1}{4}x^2+1$ で

通過する領域は右図斜線部(境界含む)



香川大学 2021

4

(1) $f'(x) = 2xe^{x^2}$ ， $f''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(1+2x^2)$

$f'(x) = 0$となるのは $x=0$.

$f''(x)$は xの値にかかわらず常に正

よって$f(x)$のグラフの増減，凹凸は下のようになっている

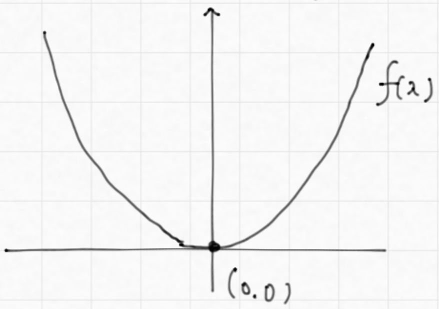
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↘	$+$	↗
$f(x)$		0	

また $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ， $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ，

($f(0) = e^0 - 1 = 0$ だからグラフは次のようになる

($f(-x) = e^{(-x)^2} - 1 = e^{x^2} - 1 = f(x)$ だから

$f(x)$は偶関数(左右対称))



グラフの極値は　極小値として $(0,0)$ のみ

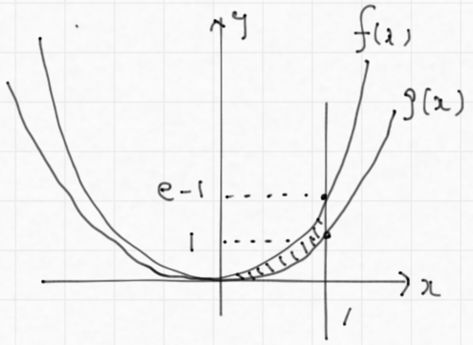
(2) $f(x) - g(x) = e^{x^2} - 1 - x^2 = h(x)$ とおく.

$h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

$e^{x^2} = 1$ となるのは $x=0$ のときで. $h'(x)$は $x>0$で常に正.

$h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ だから $x>0$で $h(x) > 0$.　よって $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$

等号 $x=0$



(3) 体積をVとして

$$V = \int_0^1 2\pi x\,(f(x) - g(x))\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 xe^{x^2} - x - x^3\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = e\pi - \frac{5}{2}\pi$$