岡山大学2021

1 (1) $\sin 3x = -\sin x$

$\quad = \sin(x+\pi)$

$3x = x+\pi+2\pi n,\ \pi-(x+\pi)+2\pi n$ （nは整数）

$x = \frac{1}{2}\pi+\pi n,\ \frac{1}{2}\pi n$ $\qquad x = $ **$0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$**

(2) $\sin 3x = \sin x$

$3x = x+2\pi\cdot n,\ \pi-x+2\pi\cdot n$ （nは整数）

$x = \pi n,\ \frac{1}{2}\pi n+\frac{1}{4}\pi$ $\qquad x = $ **$0,\ \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi$**

(3) (i) $\sin x=0$ のとき. ($x=0,\ \pi,\ 2\pi$)

$\sin 3x$ も 0 となるので. 不等式は成立する

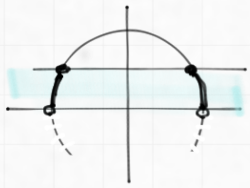
(ii) $\sin x>0$ のとき. ($0<x<\pi$)

$\sin 3x \geqq a\sin x \iff a \leqq \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3-4\sin^2 x$

$3-4\sin^2 x$ が　aの最大値の1を超えているとき. 上の不等式は $-1\leqq a\leqq 1$ を満たす全てのaについて成り立っている.

$3-4\sin^2 x \geqq 1 \iff \sin^2 x \leqq \frac{1}{2} \iff 0\leqq \sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ 0<x\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq x<\pi$



(iii) $\sin x<0$ のとき. ($\pi<x<2\pi$)

$\sin 3x \geqq a\sin x \iff a \geqq 3-4\sin^2 x$

$3-4\sin^2 x$ が. aの最小値の-1以下のとき. 上の不等式は $-1\leqq a\leqq 1$ を満たす全てのaについて成り立つ.

$3-4\sin^2 x \leqq -1 \iff \sin^2 x \geqq 1 \iff \sin x=-1 \qquad x=\frac{3}{2}\pi.$

(i)(ii)(iii)より **$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi,\ x=\frac{3}{2}\pi,\ x=2\pi$**

岡山大学2021

2 (1) A(1), B(z), C(z^2)

z≠1だから z−1≠0.

したがって. ABとACが一直線上に存在する条件は $\dfrac{z^2-1}{z-1}$ が実数となることで.

$$\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right) = \frac{(z+1)\cancel{(z-1)}}{\cancel{z-1}} = z+1$$

だから A, B, Cが一直線上に並ぶのは zが実数のとき

もとめる条件は **zが実数 (z≠±1, z≠0) となること**

(2) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ が垂直となるので.

$$\frac{1-z^2}{z-z^2} = \frac{(1+z)\cancel{(1-z)}}{z\cancel{(1-z)}} = \frac{1+z}{z}$$

が. 純虚数となる。そのための条件は、$\dfrac{1+z}{z}$ は z≠−1だから 0にはならないので

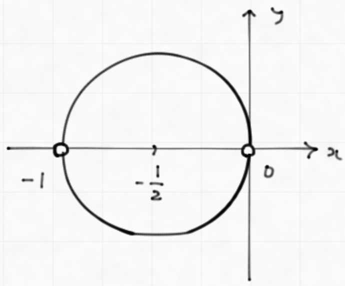
$$\frac{1+z}{z} = -\left(\overline{\frac{1+z}{z}}\right)$$

$$\bar{z} + z\bar{z} = -z - z\bar{z}$$

$$z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

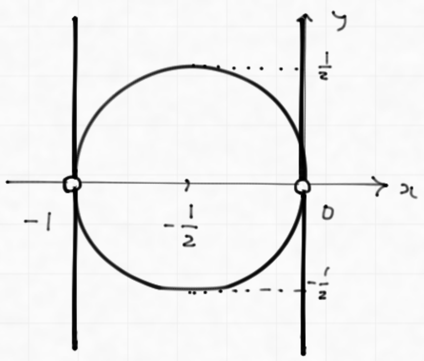


よって. もとめる条件は. $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, z≠0, z≠±1 上図太線部. 白丸除く.

(3) ∠A=90°のとき $\dfrac{z^2-1}{z-1}$ が 純虚数 $\dfrac{z^2-1}{z-1}$ = z+1 だから zの実部が−1.

∠B=90°のとき $\dfrac{z^2-z}{1-z}$ が 純虚数 $\dfrac{z\overset{-1}{\cancel{(z-1)}}}{\cancel{1-z}} = -z$ だから. zが虚虚数

これらと(2)の結果を併せて



岡山大学2021

3 (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 6$ のとき $n^3 \equiv 0 \pmod 6$

(ii) $n \equiv \pm 1 \pmod 6$ のとき $n^3 \equiv (\pm 1)^3 \equiv (\pm 1) \pmod 6$

(iii) $n \equiv \pm 2 \pmod 6$ のとき. $n^3 \equiv (\pm 2)^3 \equiv \pm 8 \equiv \pm 2 \pmod 6$

(iv) $n \equiv +3 \pmod 6$ のとき. $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 3 \pmod 6$

以上より n と n^3 を 6で割った余りは等しい.

(2) $a^3 + b^3 + c^3 = (c+1)^3$ より. 両辺を 6で割った余りは等しいので

$a^3 + b^3 + c^3 \equiv (c+1)^3 \pmod 6$

(1) より

$a + b + c \equiv c + 1 \pmod 6$

$a + b \equiv 1 \pmod 6$

証明終

(3) $a+b \geqq 1+1 = 2$, $a+b \leqq 10+10 = 20$ より $2 \leqq a+b \leqq 20$

(2)より $a+b$ を 6で割った余りは1だから. $a+b = 7, 13, 19$ のいずれか.

(i) $a+b=7$ のとき

$(a,b) = (1,6)$ のとき $c^3 + 217 = (c+1)^3 \Leftrightarrow (c+1)^3 - c^3 = 217$

$c=6$ のとき $(6+1)^3 - 6^3 = 343 - 216 = 127$

$c=7$ のとき $(7+1)^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169$

$c=8$ のとき $(8+1)^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$ $c=8$.

$c=9$ のとき $(9+1)^3 - 9^3 = 1000 - 729 = 271$ $(a,b,c) = (1,6,8)$

$c=10$ のとき. $(10+1)^3 - 10^3 = 1331 - 1000 = 331$

$(a,b) = (2,5)$ のとき $c^3 + 133 = (c+1)^3 \Leftrightarrow (c+1)^3 - c^3 = 133$ 成立しない.

$(a,b) = (3,4)$ のとき $c^3 + 91 = (c+1)^3 \Leftrightarrow (c+1)^3 - c^3 = 91$

$c=5$ のとき $(5+1)^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$

$c=4$ のとき $(4+1)^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$ $c=5$. $(a,b,c) = (3,4,5)$

(ii) $a+b=13$ のとき.

$(a,b) = (3,10)$ のとき $(c+1)^3 - c^3 = 109$ 成立しない

$(a,b) = (4,9)$ のとき $(c+1)^3 - c^3 = 97$ 〃

$(a,b) = (5,8)$ のとき $(c+1)^3 - c^3 = 89$ 〃

$(a,b) = (6,7)$ のとき $(c+1)^3 - c^3 = 85$ 〃

(iii) $a+b = 19$ のとき

$(a,b) = (9,10)$ のとき $(c+1)^3 - c^3 = 181$ 〃

((i) の $c = 6 \sim 10$ のときの $(c+1)^3 - c^3$ の値を利用)

以上より. $(a,b,c) = \mathbf{(1,6,8), (3,4,5)}$

岡山大学2021

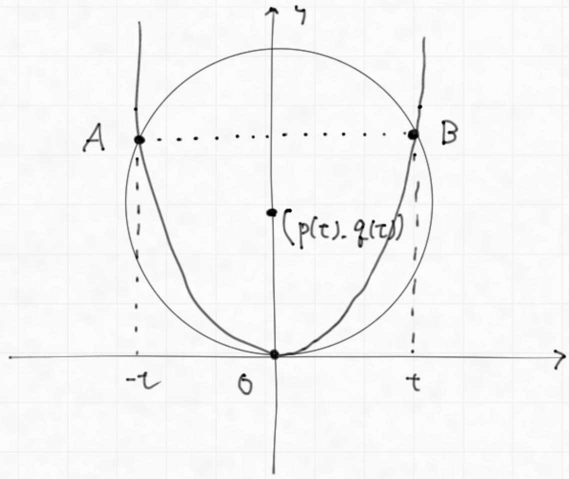
4

(1) $f(-t) = (-t)^{2n} = t^{2n} = f(t)$

したがって $y=f(x)$は偶関数であり.

AとBはy軸について対称

よって $p(t)=0$　$r(t)=q(t)$



円の中心とAとの距離も半径に等しい

$$(p(t)+t)^2+(q(t)-f(-t))^2=r(t)^2$$

$$t^2+\cancel{q(t)^2}-2q(t)\cdot t^{2n}+t^{4n}=\cancel{q(t)^2}$$

$$q(t)=\frac{t^{4n}+t^2}{2t^{2n}}=\frac{1}{2}t^{2n}+\frac{1}{2t^{2n-2}}$$

ここで $q(t)$について $n\geqq 2$ のとき $\frac{1}{2t^{2n-2}}$ は∞に発散する

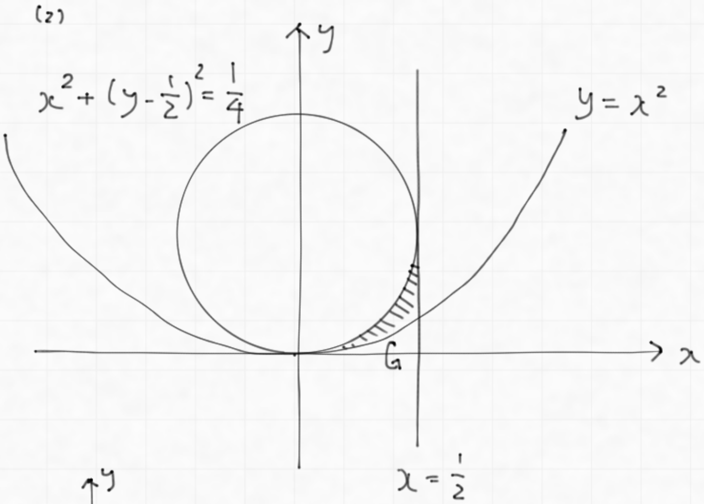
$n=1$のとき $q(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$ は $t\to+0$ で $\frac{1}{2}$に収束する.

以上より. $n=1$のときのみ. 3つの極限値は収束し.

$$a=\lim_{t\to+0}p(t)=0\quad ,\quad b=c=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$

(2)



$$\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y^2\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{2}\right)^2dx-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^4\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}-x^2-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-x^4\,dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx=(*)$$

$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$ について $\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}=y$ とおくことで左図斜線部分の面積と考えられるので $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\pi$.

$$(*)=\pi\left[-\frac{1}{160}-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{16}\pi^2=\boldsymbol{\frac{97}{480}\pi-\frac{1}{16}\pi^2}$$